



**TUGAS AKHIR - SM141501**

# **PENGARUH ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN YANG MELEWATI SUATU BOLA BERPORI PADA FLUIDA NANO**

**SYAFIATUL LAILA  
NRP 1212 100 074**

**Dosen Pembimbing I  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
Dosen Pembimbing II  
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si**

**JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016**



FINAL PROJECT - SM141501

***EFFECT OF MIXED CONVECTION FLOW  
THROUGH A POROUS SPHERE IN NANOFUID***

SYAFIATUL LAILA  
NRP 1212 100 074

Supervisor I  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
Supervisor II  
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Science  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2016

## LEMBAR PENGESAHAN

PENGARUH ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN YANG  
MELEWATI SUATU BOLA BERPORI PADA FLUIDA  
NANO

*EFFECT OF MIXED CONVECTION FLOW THROUGH  
A POROUS SPHERE IN NANOFLUID*


Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
Pada Bidang Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya


Oleh :  
**SYAFIATUL LAILA**  
NRP. 1212 100 074

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

  
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si  
NIP. 19730930 199702 1 001

  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FEMIPA ITS

  
Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003  
Surabaya, Juli 2016

## PENGARUH ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN YANG MELEWATI SUATU BOLA BERPORI PADA FLUIDA NANO

**Nama** : Syafiatul Laila  
**NRP** : 1212 100 074  
**Jurusan** : Matematika  
**Dosen Pembimbing** : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

### ABSTRAK

Pemanasan atau pendinginan fluida adalah suatu kebutuhan utama didalam banyak sektor industri. Perkembangan dewasa ini telah tercipta suatu kelas fluida baru yaitu fluida nano. Fluida nano memiliki potensi besar dalam aplikasi pemanasan. Dalam Tugas Akhir ini menjelaskan tentang aliran *steady* dari aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano. Daerah penelitian terletak pada lapisan batas dan titik stagnasi terendah ( $x \approx 0$ ). Persamaan dibangun dari persamaan kontinuitas, momentum, dan energi dalam bentuk dimensional. Persamaan pembangun ditransformasikan ke bentuk *non-dimension* kemudian diubah ke dalam persamaan similaritas, sehingga dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Keller-Box. Hasil dari penyelesaian numerik berupa profil kecepatan dan temperatur yang disimulasikan dengan berbagai variasi parameter menggunakan *software* MATLAB. Hasil numerik menunjukkan bahwa semakin besar nilai porositas maka profil kecepatan menurun dan profil temperatur meningkat. Profil kecepatan dan temperatur meningkat ketika nilai *volume fraction* semakin besar. Profil kecepatan dan temperatur menurun ketika bilangan Prandtl semakin besar. Dan semakin bertambahnya nilai parameter

konveksi campuran, maka profil kecepatan meningkat dan temperatur menurun.

**Kata kunci:** fluida nano, aliran *steady*, skema Keller-Box

## ***EFFECT OF MIXED CONVECTION FLOW THROUGH A POROUS SPHERE IN NANOFLUID***

***Name of Student*** : Syafiatul Laila  
***NRP*** : 1211 100 074  
***Department*** : Mathematics  
***Supervisor*** : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

*Heating or cooling fluid is an essential requirement in many industrial sectors. Nowadays, created a new class of fluid, that called nanofluid. Nanofluid has a great potential for heating applications. This final project describes a steady flow of mix-convection through a porous sphere in nanofluid. The research area in boundary layer and the lower stagnation point ( $x \approx 0$ ) of sphere. Governing Equation is built from the equation of continuity, momentum, and energy in dimensional. Then it's transformed to non-dimension and similarity in order to solved in numeric using Keller-Box method. The results of numerical solution is profile of velocity and temperature were simulated with a variety of parameter using MATLAB software. Numerical results show that porosity increase, the profile of velocity decrease and temperature increase. Velocity and temperature profile increase when value of volume fraction increase. Velocity and temperature profile decrease when Prandtl number increase. When value parameter of mix-convection increase, profile velocity decrease and temperature increase.*

***Keyword*** : Nanofluid, steady flow, Keller-Box scheme

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix

### **BAB I. PENDAHULUAN**

1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Asumsi Penelitian .....	4
1.5 Tujuan Penelitian .....	4
1.6 Manfaat Penelitian .....	4

### **BAB II. TINJAUAN PUSTAKA**

2.1 Penelitian Terdahulu .....	7
2.2 Konveksi .....	10
2.3 Fluida .....	11
2.4 Viskositas .....	11
2.5 Lapisan Batas .....	13
2.6 Persamaan Pembangun .....	14
2.7 Persamaan Similaritas .....	15
2.8 Metode Keller-Box .....	15
2.9 Fluida Nano .....	18
2.10 Porositas dan Permeabilitas .....	19

**BAB III. METODE PENELITIAN**

3.1 Tahapan Penelitian ..... 21

3.2 Diagram Alir Penelitian ..... 23

**BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

4.1 Persamaan Pembangun Dimensional ..... 25

4.2 Persamaan Pembangun Non-Dimensional..... 27

4.3 Persamaan Similaritas ..... 33

4.4 Penyelesaian Numerik..... 35

4.4.1 Transformasi menjadi Orde Pertama ..... 35

4.4.2 Diskritisasi Model..... 36

4.4.3 Linierisasi Model ..... 37

4.4.4 Teknik Eliminasi Blok ..... 40

4.5 Simulasi dan Analisis Hasil ..... 48

**BAB V. PENUTUP**

5.1 Kesimpulan ..... 57

5.2 Saran..... 58

**DAFTAR PUSTAKA** ..... 59

**LAMPIRAN** ..... 61

**BIODATA PENULIS** ..... 81



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Distribusi kecepatan dan suhu di dekat titik stagnasi bola .....	8
Gambar 2.2 Model fisik aliran fluida pada permukaan bola berpori .....	9
Gambar 2.3 Variasi linier dari tegangan geser terhadap laju regangan geser untuk beberapa jenis fluida .....	12
Gambar 2.4 Lapisan batas pada permukaan yang melengkung .....	13
Gambar 2.5 Stensil Skema Keller-Box.....	16
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.....	23
Gambar 4.1 Model fisik aliran fluida pada permukaan Bola berpori.....	25
Gambar 4.2 Profil kecepatan dengan variasi parameter porositas .....	50
Gambar 4.3 Profil Temperatur dengan variasi parameter porositas .....	50
Gambar 4.4 Profil kecepatan dengan variasi volume fraction .....	51
Gambar 4.5 Profil temperatur dengan variasi volume fraction .....	52
Gambar 4.6 Profil kecepatan dengan variasi bilangan Prandtl .....	53
Gambar 4.7 Profil temperatur dengan variasi bilangan Prandtl .....	53
Gambar 4.8 Profil kecepatan dengan variasi parameter Konveksi campuran.....	54

Gambar 4.9	Profil temperatur dengan variasi parameter	
	Konveksi campuran.....	55

## DAFTAR SIMBOL

$\tau$	Tegangan geser fluida
$V$	Kecepatan fluida
$x$	Koordinat arah gerak pada permukaan bola
$y$	Koordinat arah keluar permukaan bola
$\eta$	Tebal lapisan batas
$p$	Tekanan
$\rho$	Kerapatan
$\mu$	Viskositas dinamik
$\nu$	Viskositas kinematik
$K^*$	Parameter permeabilitas dari media berpori
$g$	Gravitasi
$r$	Jarak radial pada sumbu $x$
$u$	Komponen kecepatan fluida pada sumbu $x$
$v$	Komponen kecepatan fluida pada sumbu $y$
$\beta$	Koefisien perpindahan panas
$T$	Temperatur fluida
$T_f$	Temperatur dinding
$T_\infty$	Temperatur ambien
$k$	Konduktivitas panas
$a$	Jari-jari bola
$\alpha$	Difusivitas panas
$\alpha_{nf}$	Difusivitas panas fluida nano
$\mu_{nf}$	Viskositas dinamis fluida nano
$\mu_s$	Viskositas dinamis partikel
$\rho_{nf}$	Kerapatan fluida nano
$\rho_s$	Kerapatan partikel
$\beta_{nf}$	Koefisien perpindahan panas fluida nano
$\beta_s$	Koefisien perpindahan panas partikel

$Re$	Bilangan reynolds
$\chi$	<i>Volume fraction</i>
$U_{\infty}$	Kecepatan aliran bebas
$u_e$	Aliran bebas
$\phi$	Parameter porositas
$\lambda$	Parameter konveksi
$\theta$	Temperatur non-dimensional
$Gr$	Bilangan grashof
$k_{nf}$	Konduktivitas panas fluida nano
$k_s$	Konduktivitas panas partikel
$Pr$	Bilangan prandtl

**DAFTAR LAMPIRAN**

	Halaman
Lampiran 1	Merubah persamaan pembangun dimensional ke persamaan non-dimensional ..... 59
Lampiran 2	Pembentukan persamaan similaritas..... 67
Lampiran 3	Listing Program..... 73

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”*

## **BAB 1**

### **PENDAHULUAN**

#### **1.1 Latar Belakang**

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun kecilnya tegangan geser tersebut [9]. Pemanasan atau pendinginan fluida adalah suatu kebutuhan utama didalam banyak sektor industri [2]. Mekanisme perpindahan panas secara konvektif dari suatu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida biasa disebut konveksi. Konveksi diklasifikasikan menjadi dua yaitu konveksi alami (*natural convection*) dan konveksi paksa (*forced convection*), tergantung bagaimana gerakan fluida tersebut dibentuk. Perpindahan panas konvektif lain, dikenal konveksi campuran (*mixed convection*) yang merupakan kombinasi dari aliran konveksi alami dan konveksi paksa. Pada konveksi campuran terjadinya konveksi paksa lebih dominan daripada konveksi alami.

Ada dua macam fluida, yaitu Newtonian dan Non-Newtonian [12]. Perkembangan dewasa ini dalam teknologi nano telah menciptakan suatu kelas fluida baru, yaitu fluida nano. Fluida nano merupakan jenis fluida Newtonian yang memiliki potensi yang besar dalam aplikasi pemanasan [3]. Istilah fluida nano berarti dua campuran fase dimana fase yang kontinu biasanya cairan dan fase yang terdispersi terdiri dari nanopartikel padat yang sangat halus, berukuran lebih kecil daripada 50 nm. Telah dibuktikan bahwa sifat-sifat termal dari campuran yang terbentuk secara signifikan lebih tinggi daripada fluida dasarnya.

Banyak peneliti melakukan penelitian terhadap jenis-jenis aliran konveksi dari suatu fluida misalnya Nazar, *dkk* [7] meneliti aliran konveksi campuran yang melewati permukaan sebuah bola

dengan pemanasan Newtonian dengan metode Keller-Box. Basuki, dkk [11] meneliti masalah aliran konveksi bebas viskos-elastis yang melalui bola berpori dengan penyelesaian secara numerik menggunakan metode Beda Hingga Tengah.

Dari beberapa contoh tersebut, penelitian untuk permasalahan fluida menjadi sangat penting, mengingat pemanfaatannya yang sangat luas dan bisa digunakan untuk pengembangan ilmu sains maupun teknik [6]. Sehingga pada penelitian ini akan dibahas pengaruh aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano, mengingat belum adanya penelitian yang melewati benda berpori pada fluida nano. Aliran fluida nano yang melewati sebuah bola berpori merupakan permasalahan yang mengaplikasikan konsep dari lapisan batas.

Persamaan lapisan batas (*boundary layer*) sederhana merupakan upaya awal untuk menghitung berbagai permasalahan tersebut. Lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir yang dipengaruhi oleh viskositas maupun tegangan geser. Pendekatan lapisan batas diperoleh dari persamaan massa, momentum, dan energi. Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Untuk mencari solusi numerik dapat digunakan metode Keller-Box dengan cara iteratif. Mula-mula kecepatan dan suhu aliran fluida konstan, namun ketika aliran fluida mencapai pada lapisan batas terjadi perubahan baik pada kecepatan maupun suhu. Adanya perubahan kecepatan dan suhu pada lapisan batas inilah yang menjadikan menariknya lapisan batas untuk menjadi daerah penelitian.



## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, maka dapat dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan model matematika dari aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika untuk aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano?
3. Bagaimana pengaruh berbagai parameter terhadap kecepatan dan temperatur pada aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano?

## 1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Perpindahan panas yang terjadi adalah konveksi campuran.
2. Jenis fluida yang diamati adalah fluida nano cair (*Liquid*).
3. Benda yang dilewati adalah bola berpori dan tidak memiliki daya serap.
4. Bagian daerah yang diteliti yaitu pada titik stagnasi terdekat dengan *bluff body* ( $x \approx 0$ ).
5. Penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Keller-Box.

6. Visualisasi hasil penelitian dengan menggunakan *software* MATLAB.

#### **1.4 Asumsi Penelitian**

Pada penelitian ini, diasumsikan sebagai berikut:

1. *Flux* panas konstan.
2. Aliran yang diamati adalah dalam kondisi *steady*.
3. Aliran yang diamati bersifat *incompresible* atau mempunyai massa jenis konstan.
4. Aliran bersifat seragam atau searah.
5. Pengaruh dari gaya grafitasi bumi relatif kecil daripada kecepatan fluida ( $g = 0$ ).
6. Bola memiliki kedalaman pori yang sama.

#### **1.5 Tujuan Penelitian**

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Membangun model matematika dari aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano.
2. Menyelesaikan model matematika untuk aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano.
3. Menganalisa pengaruh berbagai parameter terhadap kecepatan dan temperatur dari aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano.

## **1.6 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini terdapat pada dua macam bidang, yaitu pada bidang sains dan industri. Dalam bidang Sains, merupakan suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan, khususnya aplikasi metode Keller-Box pada permasalahan aliran fluida nano yang melewati bola berpori dengan daerah penelitian pada lapisan batas. Sedangkan dalam bidang industri, merupakan bentuk aplikasi dari ilmu matematika pada kehidupan nyata.

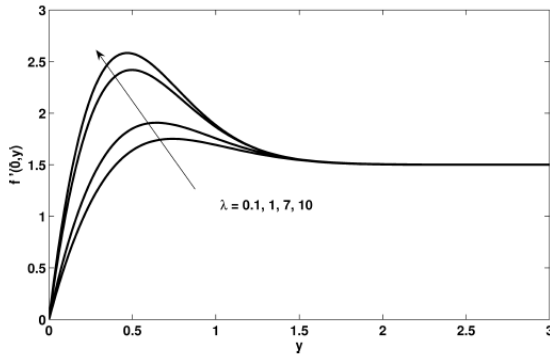
## **BAB 2**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini menjelaskan tentang penelitian terdahulu dan referensi yang digunakan dalam melakukan penelitian. Berikut dijelaskan penelitian-penelitian yang dilakukan sebelumnya dan referensi yang berkaitan dengan penyelesaian masalah penelitian ini.

#### **2.1 Penelitian Terdahulu**

Pada penelitian yang dilakukan oleh M. Z. Salleh, R. Nazar dan I. Pop (2010) menjelaskan tentang aliran konveksi campuran yang melewati permukaan sebuah bola dengan pemanasan Newtonian[7]. Mula-mula persamaan pada lapisan batas ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan similaritas. Hasil yang diperoleh diselesaikan dengan menggunakan skema metode beda hingga Box-Keller. Hasil numeriknya menjelaskan tentang profil kecepatan dan temperatur, *skin friction*, dan perpindahan panas untuk parameter yang berbeda dari kondisi fisiknya, seperti viskoelastis, konveksi campuran, pembangkit panas, serta bilangan Prandtl. Pada semua kondisi tersebut, kecepatan dan nilai *skin friction* menurun selama temperatur meningkat pada nilai parameter viskoelastis. Pada kasus dinding temperatur, nilai perpindahan panas menurun terhadap kenaikan nilai parameter viskoelastis. Sedangkan untuk *flux* panas yang konstan, nilai perpindahan panas meningkat pada penambahan nilai parameter viskoelastis. Pengaruh bilangan Prandtl pada fluida viskoelastis adalah menurunkan profil kecepatan dan temperatur. Gambar 2.1 menunjukkan hasil simulasi yang diperoleh dari perhitungan numerik.

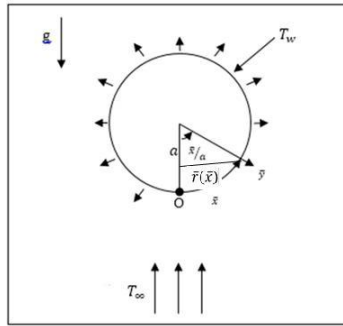


Gambar 2.1 Distribusi kecepatan dan temperatur di dekat titik stagnasi bola ( $x \approx 0$ ), dengan variasi nilai  $\lambda$  ketika  $Pr = 0.7$  dan  $\gamma = 1$ .

Profil kecepatan dan suhu di dekat titik stagnasi bola ( $x \approx 0$ ) pada Gambar 2.1 dengan variasi nilai  $\lambda$  ketika  $Pr = 0.7$  dan  $\gamma = 1$ . Telah ditemukan nilai-nilai tetap  $Pr$  dan  $\gamma$ , profil kecepatan meningkat saat profil suhu menurun saat parameter konveksi campuran  $\lambda$  meningkat. Gambar 2.1 juga memperlihatkan bahwa profil kecepatan terjadi *overshoots* ketika  $\lambda \geq 1$  dimana *overshoots* ini menunjukkan bahwa grafik jauh lebih tinggi ketika  $\lambda = 10$  daripada  $\lambda = 1$ .

Selain itu, penelitian lain juga dilakukan oleh Basuki dkk (2015). Permasalahan yang diangkat adalah aliran konveksi bebas viskos-elastis yang melalui bola berpori dengan penyelesaian secara numerik menggunakan metode Beda Hingga Tengah [11]. Permasalahan yang mempengaruhi aliran konveksi ini meliputi penurunan kontinuitas, momentum, dan energi. Selanjutnya persamaan pembangun (*Governing Equation*) berdimensi yang terbentuk akan diubah menjadi persamaan pembangun non-dimensi dan kemudian ditransformasi menjadi persamaan pembangun non-similar. Hasil numerik yang diperoleh berkaitan

dengan kecepatan, suhu profil, gaya gesek (*skin friction*), dan karakteristik perpindahan panas. Selanjutnya dianalisis dampak dari parameter viskoelastik ( $K$ ), konveksi bebas ( $\lambda$ ), parameter pergerakan bilangan Prandtl ( $Pr$ ) terhadap distribusi profil kecepatan ( $f'$ ), profil temperatur ( $\theta$ ), gesekan kulit ( $Cf$ ), dan temperatur dinding ( $\theta_w(x)$ ). Aliran konveksi bebas yang melewati permukaan sebuah bola berpori diilustrasikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Model fisik aliran fluida pada permukaan bola berpori

Pada Gambar 2.2 koordinat  $\bar{x}$  merupakan jarak sepanjang permukaan bola dari titik tetap yang lebih rendah (*stagnation point*). Koordinat  $\bar{y}$  merupakan jarak normal pada permukaan bola dan  $q_w$  merupakan konstanta fluks panas pada permukaan bola. Sedangkan  $T_\infty$  merupakan temperatur lingkungan, dengan asumsi  $T_w > T_\infty$  karena bola dalam kondisi panas (aliran searah) dan  $\bar{y}(\bar{x})$  merupakan jarak radial dari sumbu simetris hingga permukaan bola yang didefinisikan dengan  $\bar{y}(\bar{x}) = a \sin\left(\frac{x}{a}\right)$ .

## 2.2 Konveksi

Konveksi adalah mekanisme perpindahan panas secara konvektif dari suatu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Perpindahan panas secara konvektif terjadi

akibat gerakan molekular dan gerakan fluida dalam jumlah besar [4]. Konveksi diklasifikasikan menjadi dua, yaitu :

1. Konveksi Alami atau Konveksi Bebas (*free convection*)  
 Dalam konveksi alami setiap gerakan fluida disebabkan secara alami, seperti efek daya apung (*buoyancy force*) yang dihasilkan dari perbedaan massa jenis sesuai dengan variasi suhu fluida.
2. Konveksi Paksa (*forced convection*),  
 Sedangkan pada konveksi paksa, fluida dipaksa mengalir di atas permukaan atau pada tabung yang disebabkan oleh sumber eksternal, misalnya pompa atau kipas angin.

Pada perkembangan perpindahan panas konvektif, dikenal konveksi alir campuran (*mixed convection flows*) atau konveksi campuran (*mixed convection*) yang merupakan kombinasi dari aliran konveksi alami dan konveksi paksa. Konveksi campuran terjadi pada saat efek dari gaya alir pada konveksi bebas menjadi signifikan, dimana konveksi paksa lebih berpengaruh daripada konveksi alami. Contoh dari konveksi campuran dalam kehidupan sehari-hari dapat kita lihat pada saat asap timbul dari api (*natural*) dan pada saat bersamaan asap ditimbulkan oleh faktor eksternal seperti ledakan dari gas silinder (*forced*). Untuk mempermudah melakukan analisa lebih kompleks, digunakan parameter dalam bentuk non-dimensional, antara lain: Bilangan Reynolds, Bilangan Prandtl, Bilangan Grashof dan sebagainya.

## 2.3 Fluida

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun kecilnya tegangan geser tersebut [9]. Sebuah tegangan geser (gaya per satuan luas) geser terbentuk apabila sebuah gaya tangensial bekerja pada sebuah

permukaan.apabila benda-benda padat biasa seperti baja atau logam-logam lainnya dikenai oleh suatu tegangan geser, mula-mula benda ini akan berdeformasi (biasanya sangat kecil), tetapi tidak akan terus-menerus berdeformasi. Namun, cairan yang biasa seperti air, minyak, dan udara memenuhi definisi sebuah fluida, yang artinya zat-zat tersebut akan mengalir apabila padanya bekerja sebuah tegangan geser.

Untuk fluida-fluida biasa seperti air, minyak, bensin dan udara, tegangan dan laju regangan geser (gradient kecepatan) dapat dikaitkan dalam suatu hubungan dalam bentuk

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

dimana konstanta kesebandingannya disimbolkan dengan huruf yunani  $\mu$  dan disebut sebagai viskositas dari fluida tersebut.

Fluida-fluida yang tegangan gesernya berhubungan secara linier terhadap laju regangan geser digolongkan sebagai fluida *Newtonian*. Sedangkan fluida-fluida yang tegangan gesernya tidak berhubungan secara linier terhadap laju regangan geser digolongkan sebagai fluida *non-Newtonian*.

## 2.4 Viskositas

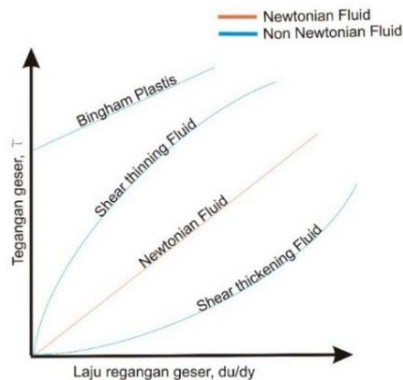
Viskositas fluida merupakan ukuran ketahanan sebuah fluida terhadap deformasi atau perubahan bentuk [3]. Viskositas dipengaruhi oleh temperatur, tekanan, kohesi dan laju perpindahan momentum molekularnya. Untuk fluida yang mencair akibat geseran (*shear thinning fluids*) viskositasnya berkurang sehingga meningkatnya laju geseran dan semakin kuat fluida mengalami geseran maka fluida tersebut semakin encer (viskositasnya berkurang). Fluida yang termasuk golongan ini mayoritas suspensi koloid dan larutan polimer. Misalnya, cat lateks tidak menetes dari kuas



karena laju gesernya kecil dan viskositasnya besar. Namun cat tersebut mengalir dengan mulus pada dinding karena lapisan tipis cat antara dinding dengan kuas mengakibatkan laju geseran yang besar dan viskositas yang kecil.

Untuk fluida yang mengental akibat geseran (*shear thickening fluids*) viskositasnya meningkat dengan meningkatnya laju geseran dan semakin kuat fluida mengalami geseran maka fluida tersebut semakin kental (viskositasnya bertambah). Contoh yang umum dari jenis fluida ini antara lain adalah air tepung jagung (maizena).

Perilaku jenis lain adalah plastik Bingham, yang bukan merupakan fluida namun juga bukan zat padat. Bahan seperti itu dapat menahan tegangan geser tertentu tanpa gerakan, namun bila tegangan luluhnya terlewati, bahan tersebut akan mengalir seperti fluida. Contoh dari bahan plastik Bingham adalah odol dan mayonaise. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 2.3.

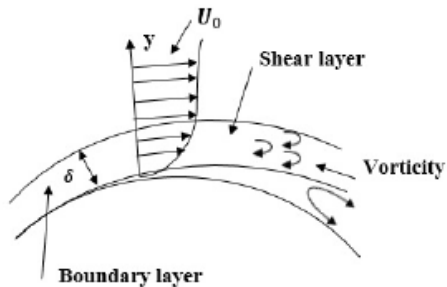


Gambar 2.3 Variasi linier dari tegangan geser terhadap laju regangan geser untuk beberapa jenis fluida.

Viskositas sangat sensitif terhadap temperatur. Sebagai contoh, jika temperatur air berubah dari 60°F ke 100°F,

kerapatan berkurang ke bawah dari 1%, tetapi viskositas berkurang sekitar 40%. Jadi jelas bahwa perhatian khusus harus diberikan pada temperatur ketika menentukan viskositas. Viskositas dari zat cair berkurang seiring dengan kenaikan temperatur.

## 2.5 Lapisan Batas



Gambar 2.4 Lapisan batas pada permukaan yang melengkung

Lapisan Batas (*boundary layer*) adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat tempat fluida mengalir, dimana di dalam lapisan tersebut pengaruh viskositas maupun gaya inersia. Gambar 2.4 menunjukkan lapisan batas pada permukaan yang melengkung. Ketika partikel fluida melewati permukaan benda, maka kecepatan berkurang. Pada keadaan tersebut telah banyak diasumsikan bahwa kecepatan partikel adalah nol. Partikel-partikel ini kemudian menghambat gerakan partikel pada lapisan fluida yang berdekatan, kemudian juga menghambat gerakan partikel pada lapisan berikutnya, dan seterusnya sampai pada jarak  $y = \delta$  dari permukaan. Perlambatan dari gerakan fluida ini berkaitan dengan tegangan geser (*shear stresses*)  $\tau$  pada bidang yang sejajar dengan kecepatan fluida. Dengan meningkatnya jarak  $y$  dari permukaan,

$x$  komponen kecepatan dari fluida,  $u$  harus meningkat hingga mendekati nilai aliran bebas  $u_\infty$ . Simbol  $\infty$  digunakan untuk menunjukkan bahwa kondisi aliran bebas (*free stream*) berada di luar lapisan batas.

Simbol  $\delta$  merupakan ketebalan lapisan batas. Kecepatan lapisan batas mengacu pada letak di mana  $u$  bervariasi dengan  $y$  melalui lapisan batas. Dengan demikian, aliran fluida ditandai oleh dua kondisi yang berbeda, lapisan tipis fluida ketika kecepatan dan tegangan geser dalam jumlah besar dan berada di luar lapisan batas ketika kecepatan dan tegangan geser dapat diabaikan (dalam jumlah kecil).

## 2.6 Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun dibentuk dari 3 persamaan dasar, yaitu persamaan kontinuitas, momentum dan energi. Berikut adalah persamaan pembangun dalam bentuk dimensional aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola pejal pada fluida nano [1]:

### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{r} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{r} \bar{v}) = 0 \quad (2.2)$$

### 2. Persamaan Momentum

terhadap sumbu  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \\ & \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

terhadap sumbu  $\bar{y}$ :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \\ & \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty) \cos \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (2.5)$$

## 2.7 Persamaan Similaritas

Agar persamaan dimensional dapat diselesaikan secara numerik, maka persamaan yang berdimensi  $n+1$  dirubah menjadi persamaan berdimensi  $n$  (maksimal berdimensi 2) dengan menggunakan fungsi alir (*stream function*). Misalnya pada aliran yang melewati bola, fungsi alir ini dapat merubah persamaan yang berdimensi 3 menjadi persamaan berdimensi 2 (lingkaran). Persamaan yang telah berubah inilah yang disebut dengan persamaan similaritas. Fungsi alir adalah sebagai berikut :

$$\psi = xrf(x, y), \quad \theta = \theta(x, y) \quad (2.6)$$

dan

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.7)$$

## 2.8 Metode Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu penyelesaian numerik pada lapisan batas (metode implisit). Skema ini merupakan bentuk implisit untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik dengan lebih tepat dan efisien. Berikut adalah tahap-tahap penyelesaian dengan menggunakan Keller-Box [1]:

1. Mengubah persamaan orde tinggi menjadi orde satu.

Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu. Berikut adalah contoh mengubah persamaan diferensial orde dua menjadi orde satu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan mendefinisikan

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

maka bentuk persamaan orde kedua tersebut dapat dituliskan menjadi dua persamaan orde pertama sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v$$

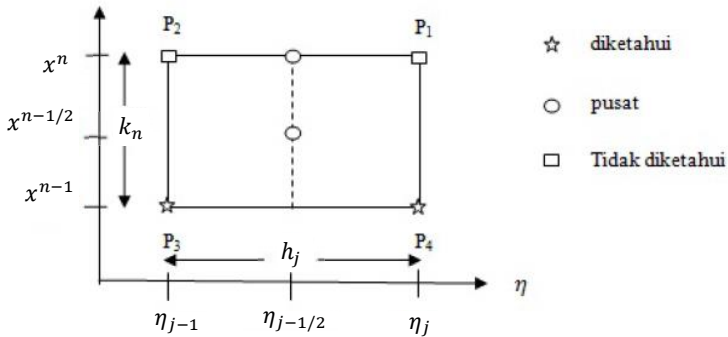
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}$$

## 2. Diskritisasi model matematika

Diskritisasi dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga pusat, terhadap sumbu  $x$  dan  $\eta$  dengan skema seperti pada Gambar 2.5.

$$x^0 = 0, \quad x^n = x^{n-1} + k_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_j = \eta_{j-1} + h_j, \quad j = 1, 2, \dots, J$$



Gambar 2.5 Skema Keller-Box

dengan  $k_n$  merupakan nilai  $\Delta x$  dan  $h_j$  merupakan nilai  $\Delta \eta$ . Notasi  $( )_j^n$  digunakan untuk mencari nilai titik tengah sebagai berikut:

$$x^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^n + x^{n-1})$$

$$\begin{aligned}\eta_{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\eta_j + \eta_{j-1}) \\ (\ )_j^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}[(\ )_j^n + (\ )_j^{n-1}] \\ (\ )_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}[(\ )_j^n + (\ )_{j-1}^n]\end{aligned}$$

Fungsi ( ) pada umumnya

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{(u)_{j-\frac{1}{2}}^n - (u)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k_n} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{(u)_j^{n-\frac{1}{2}} - (u)_{j-1}^{n-\frac{1}{2}}}{h_j}\end{aligned}$$

3. Linierisasi dengan menggunakan metode *Newton*  
Dikenalkan bentuk iterasi untuk metode *Newton* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}a_j^{(i+1)} &= a_j^{(i)} + \delta a_j^{(i)} \\ b_j^{(i+1)} &= b_j^{(i)} + \delta b_j^{(i)}\end{aligned}$$

simbol  $(i)$  yaitu iterasi, dimana iterasi berjalan dari 1 hingga  $(np + 1)$  dengan  $np$  merupakan banyaknya partisi sumbu  $\eta$ . Dengan memisah variabel delta, dengan menghilangkan orde tinggi maka akan didapat persamaan yang linier.

4. Teknik Eliminasi Blok

Pada tahap akhir metode *Keller-Box* dapat diselesaikan dengan menggunakan matrik tridiagonal yang elemen-elemennya berupa matriks blok. Langkah-langkah dari tahap ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari elemen-elemen dari matrik tridiagonal.
2. Faktorisasi matrik tridiagonal dengan dekomposisi LU (*Lower Upper*).

3. Menggunakan *Forward Sweep* dan *Backward Sweep* untuk mencari delta dengan kriteria konvergen.

## 2.9 Fluida Nano

Sebuah pendekatan baru untuk meningkatkan konveksi panas adalah dengan menggunakan dispersi koloid dari partikel padat (dalam kisaran nanometrik, yaitu  $d < 10^{-7}$  m) ke dalam cairan biasa, hal ini yang dinamakan dengan Fluida Nano atau *nanofluids* [7]. Jadi, *nanofluids* merupakan cairan yang mengandung dispersi nanopartikel. Nanopartikel yang berbeda dari partikel konvensional dalam arti harus terus dicampurkan dalam cairan dasar tanpa sedimentasi. Perpindahan panas dan karakteristik aliran *nanofluids* begitu penting karena cairan ini merupakan cara yang mungkin untuk meningkatkan perpindahan panas untuk konveksi campuran dan konveksi paksa. Ukuran partikel kecil, penyumbatan, dan transmitansi termal dari cairan jelas akan sangat meningkat ketika konsentrasi ditingkatkan, terutama dalam kisaran laminar. nanopartikel yang khas digunakan adalah turunan karbon (grafit, karbon nanotube, karbida logam), oksida logam ( $Al_2O_3$ ,  $CuO$ ,  $TiO_2$  ...), dalam kedua kasus hingga 5% dalam konsentrasi berat, atau logam murni (Cu, Al, Ag, Au ... ) dalam konsentrasi yang jauh lebih kecil ( $< 0,1\%$ ).

Efektivitas konduktivitas termal dari fluida nano diberikan

$$k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} k_f \quad (2.8)$$

dengan efektivitas dari viskositas fluida nano

$$\mu_{nf} = \mu_f \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5}} \quad (2.9)$$

dan kerapatan dan spesifik panas fluida nano

$$\begin{aligned} \rho_{nf} &= (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s \\ (\rho C_p)_{nf} &= (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 2.10 Porositas dan Permeabilitas

Porositas adalah kemampuan suatu benda atau media berpori untuk menyerap dan menahan suatu fluida di dalamnya. Porositas suatu benda erat kaitannya dengan permeabilitas permeabilitas (biasanya dilambangkan dengan  $K^*$ ) yaitu suatu parameter yang menunjukkan kemampuan suatu benda atau media berpori untuk memungkinkan suatu fluida mengalir melewatinya. Semakin tinggi permeabilitas suatu benda berpori akan memungkinkan fluida dapat bergerak lebih cepat saat melaluinya. Sesuai dengan hukum Darcy kecepatan aliran fluida yang melalui media berpori, akan sebanding dengan penurunan tekanan dan viskositas [6] atau dapat ditulis.:

$$\Delta P = -\frac{\mu}{K^*} V \quad (2.11)$$



## **BAB 3**

### **METODE PENELITIAN**

Pada bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian permasalahan aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano, antara lain sebagai berikut:

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Tahapan penelitian yang dalam Penyelesaian Tugas Akhir ini antara lain sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini akan dicari referensi-referensi yang dapat menunjang pengerjaan tugas akhir ini.

2. Memodelkan aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano

Model matematika diperoleh dari persamaan pembangun yang terdiri dari persamaan kontinuitas, momentum dan energi dalam bentuk dimensional.

3. Mengubah persamaan pembangun ke bentuk non-dimensional

Pada tahap ini persamaan pembangun akan diubah dari bentuk dimensional menjadi bentuk non-dimensional dengan menggunakan variabel non dimensional dan parameter non dimensional. Hal Ini dilakukan untuk menjadikan persamaan pembangun tidak berpengaruh terhadap satuan.

4. Mengubah persamaan non-dimensional menjadi persamaan similaritas

Untuk mengubah persamaan pembangun yang sudah tak berdimensi ke persamaan similaritas dapat

digunakan fungsi alir (*stream function*). Hal ini dilakukan untuk menjadikan persamaan tiga dimensi (bola) menjadi persamaan dua dimensi (lingkaran). Sehingga nantinya dapat diselesaikan dengan metode Keller-Box.

5. Penyelesaian numerik

Pada tahap ini akan dilakukan penyelesaian numerik model matematika dari aliran konveksi campuran yang melewati bola berpori pada fluida nano dengan menggunakan metode Keller-Box. Adapun seperti yang telah dijelaskan pada Bab 2, metode Keller-Box yang meliputi 4 tahap yaitu mengubah persamaan similaritas menjadi orde pertama, diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga pusat, linierisasi dengan metode newton dan dilakukan teknik eliminasi blok.

6. Membuat program

Pada tahap ini akan dibuat program dari penyelesaian numerik dari metode Keller-Box dengan menggunakan *software* MATLAB.

7. Simulasi

Pada tahap ini akan dilakukan simulasi dengan variasi parameter porositas, variasi nilai *volume fraction*, variasi Bilangan Prandtl dan variasi parameter konveksi campuran dengan menggunakan program yang telah dibuat.

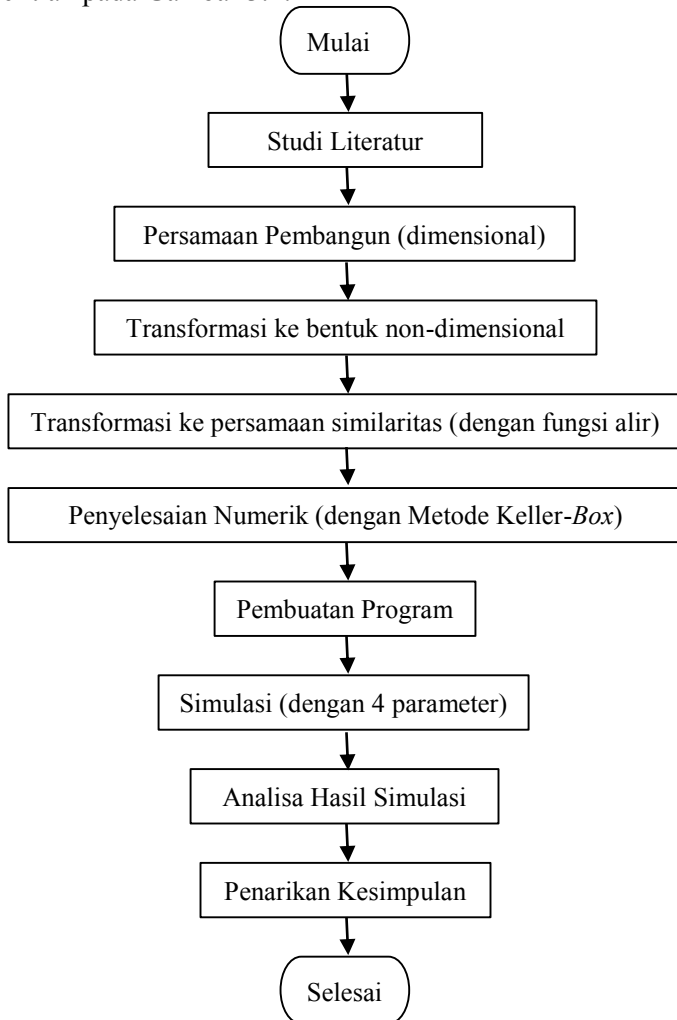
8. Menganalisa hasil dan membuat kesimpulan.

Pada tahap ini akan dianalisis hasil simulasi pengaruh dari keempat parameter diatas terhadap profil temperatur dan kecepatan kemudian diambil kesimpulan.

9. Pembuatan laporan.

### 3.2 Diagram Alir Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini ditampilkan dalam diagram alir penelitian pada Gambar 3.1:

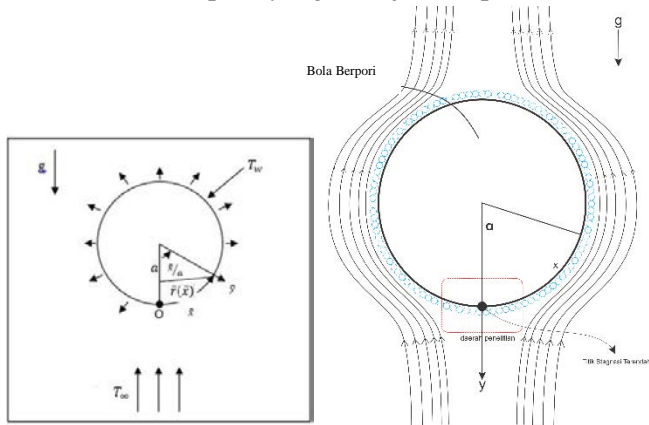


Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

## BAB 4

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano mengalir seragam dari bawah ke atas. Pada penelitian ini sumbu  $-x$  menggambarkan lintasan pada permukaan bola sedangkan sumbu  $-y$  merupakan tebal lapisan batas pada daerah penelitian. Daerah penelitian ini terletak pada titik stagnasi terendah atau  $x \approx 0$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1.



**Gambar 4.1.** Model fisik aliran fluida pada permukaan bola berpori

#### 4.1 Persamaan Pembangun Dimensional

Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Berikut akan diuraikan persamaan pembangun dalam bentuk dimensional aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola pejal pada fluida nano [1]:

##### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (4.1)$$

## 2. Persamaan Momentum

terhadap sumbu  $\bar{x}$ :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty) \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \quad (4.2)$$

terhadap sumbu  $\bar{y}$ :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty) \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \quad (4.3)$$

## 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.4)$$

kondisi batas:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_f \text{ pada saat } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} \rightarrow T_\infty \text{ pada saat } \bar{y} \rightarrow \infty$$

dengan jarak dari sumbu simetri ke permukaan  $\bar{r} = a \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$ .

Pada Tugas Akhir ini permasalahan fluida melewati suatu media yaitu bola berpori. Menurut hukum Darcy [9], gaya yang bekerja pada fluida yang melewati suatu media berpori, maka gaya  $F = (F_x, F_y, 0)$  dipengaruhi oleh porositas. Sehingga persamaan menjadi:

### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (4.5)$$

### 2. Persamaan Momentum

terhadap sumbu  $\bar{x}$ :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{u} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty) \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \quad (4.6)$$

terhadap sumbu  $\bar{y}$ :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{v} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty) \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \quad (4.7)$$

3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.8)$$

dengan kondisi batas:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_f \text{ pada saat } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} \rightarrow T_\infty \text{ pada saat } \bar{y} \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

## 4.2 Persamaan Pembangun Non-dimensional

Untuk mengubah persamaan pembangun dimensional menjadi persamaan pembangun non-dimensional dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan variabel non-dimensional yang diberikan sebagai berikut [1]:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right), \quad r = \frac{\bar{r}}{a}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\rho_{nf} U_\infty^2}$$

$$u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \quad u_e = \frac{\bar{u}_e(x)}{U_\infty}, \quad v = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right), \quad T = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty} \quad (4.10)$$

ke Persamaan (4.5) - (4.8). Didefinisikan bilangan Reynolds

$$Re = \frac{U_\infty a}{\nu_f}, \text{ Bilangan Grashof } Gr = \frac{g \beta (\bar{T}_f - \bar{T}_\infty) a^3}{\nu_f^2}, \text{ kecepatan aliran}$$

bebas  $\bar{u}_e = \left( \frac{3}{2} \right) U_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$  dan  $\nu_f$  adalah viskositas kinematik pada fluida.

Dengan substitusi variabel-variabel non-dimensional pada Persamaan (4.10) dan parameter non-dimensional:

$$Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f} = \frac{\mu_f}{\rho_f \alpha_f} \text{ (Bilangan Prandtl)}$$

$$\phi = \frac{\mu_f a}{\rho_f K^* U_\infty} \text{ (Parameter Porositas, [9])}$$

$$\lambda = \frac{Gr}{Re^2} \text{ (Parameter Konveksi Campuran)}$$

Sehingga didapatkan persamaan dalam bentuk non-dimensional (Lampiran 1) sebagai berikut:

1. Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) = 0 \quad (4.11)$$

2. Persamaan Momentum

terhadap sumbu  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi u + \\ & \frac{1}{Re} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \\ & \frac{\left(\chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi)\right)}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} T \lambda \sin x \end{aligned} \quad (4.12)$$

terhadap sumbu  $\bar{y}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi v + \\ & \frac{1}{Re^2} \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{Re} \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \\ & \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\left(\chi \rho_s \frac{\beta_s}{\beta_f} + (1-\chi) \rho_f\right)}{\rho_{nf}} \theta \lambda \cos x \end{aligned} \quad (4.13)$$

3. Persamaan Energi

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.14)$$

kondisi batas menjadi:

$$\begin{aligned} u = v = 0, T = 1 \text{ pada saat } y = 0 \\ u \rightarrow \frac{3}{2} \sin x, T \rightarrow 0 \text{ pada saat } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.15)$$

dengan hubungan antara fluida biasa dengan fluida nano diberikan persamaan sebagai berikut [1]:

$$\begin{aligned} \text{Kerapatan} &: \rho_{nf} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s \\ \text{Viskositas dinamik} &: \mu_{nf} = \mu_f \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \\ \text{Spesifik panas} &: (\rho C_p)_{nf} = (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s \\ \text{Konduktivitas panas} &: \frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \\ \text{Koefisien ekspansi termal: } \beta_{nf} &= (\chi\rho_s\beta_s + (1 - \chi)\rho_f\beta_f) \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan pendekatan lapisan batas. Dengan menggunakan pendekatan pada lapisan batas dimana  $Re \rightarrow \infty$  sehingga  $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$  maka diperoleh:

1. Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) = 0 \quad (4.16)$$

2. Persamaan Momentum terhadap sumbu  $\bar{x}$ :



$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi u +$$

$$\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\left(\chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi)\right)}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} T \lambda \sin x \quad (4.17)$$

terhadap sumbu  $\bar{y}$ :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.18)$$

### 3. Persamaan Energi

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \left(\frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)}\right) \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}\right)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad (4.19)$$

Dari persamaan (4.18) dapat disimpulkan bahwa tekanan fluida ( $p$ ) tidak tergantung variabel  $y$ . Sehingga, hanya terdapat satu persamaan momentum yang digunakan dalam membangun model matematika pada penelitian ini yaitu:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi u +$$

$$\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) +$$

$$\frac{\left(\chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi)\right)}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} T \lambda \sin x \quad (4.20)$$

Untuk persamaan momentum di luar lapisan batas, maka  $u_e$  merupakan pengganti  $u$ , dimana  $u_e$  merupakan aliran bebas. Sehingga persamaan menjadi:

$$\begin{aligned}
u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi u_e + \\
& \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left( \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \right) + \\
& \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} T \lambda \sin x
\end{aligned} \tag{4.21}$$

didefinisikan kecepatan aliran bebas  $u_e = \frac{3}{2} \sin x$  [1], maka:

$$\frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \tag{4.22}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.22) ke Persamaan (4.21) didapatkan

$$\begin{aligned}
u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = & -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi u_e + \\
& \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} T \lambda \sin x
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Berdasarkan kondisi batas saat  $y \rightarrow \infty$  (luar lapisan batas) maka  $T = 0$  sehingga persamaan menjadi

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi u_e \tag{4.24}$$

Kemudian dilakukan substitusi Persamaan (4.24) ke Persamaan (4.20), maka didapatkan persamaan momentum :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi(u - u_e) +$$

$$\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} T \lambda \sin x \quad (4.25)$$

Dari uraian diatas, maka diperoleh persamaan pembangun dalam bentuk non-dimensional sebagai berikut:

1. Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) = 0 \quad (4.26)$$

2. Persamaan Momentum

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi(u - u_e) +$$

$$\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} T \lambda \sin x \quad (4.27)$$

3. Persamaan Energi

$$\left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.28)$$

dengan kondisi batas:

$$u = v = 0, T = 1 \text{ pada saat } y = 0$$

$$u \rightarrow \frac{3}{2} \sin x, T \rightarrow 0 \text{ pada saat } y \rightarrow \infty$$

### 4.3 Persamaan Similaritas

Pada tahap sebelumnya masih terdapat dua komponen kecepatan yaitu  $u$  dan  $v$  (2 dimensi). Sehingga agar penyelesaian dapat diselesaikan secara numerik maka persamaan dapat diubah menjadi 1 dimensi. Untuk mengubah persamaan 2 dimensi ke 1 dimensi, digunakan variabel similaritas sebagai berikut:

$$\psi = xr(x)f(x, \eta), \quad T = \theta(x, \eta), \quad \eta = y \quad (4.29)$$

Dengan  $\psi$  disebut fungsi alir, yang didefinisikan:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.30)$$

dan dari persamaan (4.29) dan (4.30) maka didapat:

$$u = x \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{dan} \quad v = -x \frac{\partial f}{\partial \eta} - f(1 + x \cot x) \quad (4.31)$$

Sehingga, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.29)-(4.30) ke dalam persamaan pembangun non-dimensional pada Persamaan (4.26), (4.27) dan (4.28) sehingga diperoleh persamaan similaritas (Lampiran 2) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + (1 + x \cot x) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \\ & \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda \theta \frac{\sin x}{x} + \frac{9}{4} \frac{\sin x \cos x}{x} - \\ & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{3}{2} \right) = x \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$2. \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + (1 + x \cot x) f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = x \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (4.33)$$

dengan kondisi batas persamaan similar sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0, -\chi \frac{\partial f}{\partial \eta} = (f + f x \cot x), \quad \theta = 1 \quad \text{pada saat } \eta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &\rightarrow \frac{3 \sin x}{2x}, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{pada saat } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pada penelitian ini diteliti karakteristik fluida pada daerah titik stagnasi terendah. Titik stagnasi terendah adalah titik dengan lapisan batas berada paling dekat dengan benda. Pada dinamika fluida, titik stagnasi terendah dari bola bernilai mendekati nol atau  $x \approx 0$ , sehingga Persamaan (4.32) dan (4.33) menjadi:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} f''' + 2ff'' - f'^2 + \\ & \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda \theta + \frac{9}{4} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi \left( f' - \frac{3}{2} \right) = 0 \\ 2. & \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \theta'' + 2f\theta' = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

(4.36)

Tanda ' adalah menunjukkan turunan terhadap  $\eta$

Dengan kondisi batas sebagai berikut :

$$f' = f = 0, \theta = 1 \quad \text{pada saat } \eta = 0$$

$$f' \rightarrow \frac{3}{2}, \theta \rightarrow 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty \quad (4.37)$$

#### 4.4 Penyelesaian Numerik

Pada penelitian ini, metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan model matematika dari aliran konveksi campuran yang melewati bola berpori pada fluida nano adalah metode Keller-Box. Penyelesaian ini diawali dengan transformasi orde tinggi pada Persamaan (4.35) dan (4.36) menjadi persamaan orde pertama. Kemudian dilakukan diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat, linierisasi dengan Metode Newton dan selanjutnya diselesaikan dengan teknik Eliminasi Blok. Sehingga simulasi dari model matematika dapat diselesaikan dengan menggunakan *software* MATLAB.

##### 4.4.1 Transformasi menjadi Orde Pertama

Persamaan model sistem (4.35) dan (4.36) merupakan persamaan dengan orde tinggi. Dalam penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Keller-Box maka persamaan harus bentuk orde pertama, sehingga dilakukan pemisalan fungsi sebagai berikut:

$$f' = m \quad (4.38)$$

$$f'' = m' = z \quad (4.39)$$

$$s' = q \quad (4.40)$$

Dengan  $s(x, y)$  merupakan pengganti  $\theta(x, y)$  yaitu variabel temperatur. Sehingga Persamaan (4.35) dan (4.36) dapat ditulis menjadi:

$$1. \quad Az' + 2fz - m^2 + Bs + \frac{9}{4} - C \left( m - \frac{3}{2} \right) = 0 \quad (4.41)$$

$$2. \quad Dq' + 2fq = 0 \quad (4.42)$$

dengan :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \\
B &= \left(\chi \rho_s \frac{\beta_s}{\beta_f} + (1-\chi) \rho_f\right) \frac{1}{((1-\chi) \rho_f + \chi \rho_s)} \lambda \\
C &= A \phi \\
D &= \frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}\right)}
\end{aligned}$$

dan kondisi batas menjadi:

$$\begin{aligned}
f(0) &= m(0) = 0, \quad s(0) = 1 \text{ pada saat } y = 0 \\
m &\rightarrow \frac{3}{2}, s \rightarrow 0 \text{ pada saat } s \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{4.43}$$

#### 4.4.2 Diskritisasi Model

Seperti yang telah dijelaskan pada Bab 2, diskritisasi dapat dilakukan pada Persamaan (4.38)-(4.42) dengan menggunakan metode beda hingga pusat, terhadap sumbu  $x$  dan  $\eta$ . Karena daerah penelitian terletak pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ), sehingga diskritisasi hanya dilakukan terhadap sumbu  $\eta$ . Maka didapatkan:

$$\frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} = \frac{1}{2} (m_j + m_{j-1}) = m_{j-\frac{1}{2}} \tag{4.44}$$

$$\frac{m_j - m_{j-1}}{h_j} = \frac{1}{2} (z_j + z_{j-1}) = z_{j-\frac{1}{2}} \tag{4.45}$$

$$\frac{s_j - s_{j-1}}{h_j} = \frac{1}{2} (q_j + q_{j-1}) = q_{j-\frac{1}{2}} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
&A \left( \frac{z_j - z_{j-1}}{h_j} \right) + 2(fz)_{j-\frac{1}{2}} - \left( m_{j-\frac{1}{2}} \right)^2 + Bs_{j-\frac{1}{2}} + \frac{9}{4} - Cm_{j-\frac{1}{2}} + \\
&\frac{3}{2}C = - \left( \frac{9}{4} + \frac{3}{2}C \right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$D\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{h_j}\right) + 2(fq)_{j-\frac{1}{2}} = 0 \quad (4.48)$$

Dengan kondisi batas :

$$f_0 = 0, m_0 = 0, s_0 = 1 \text{ saat } y = 0$$

$$f' \rightarrow \frac{3}{2}, s \rightarrow 0 \text{ saat } s \rightarrow \infty \quad (4.49)$$

Persamaan (4.44)-(4.49) dapat disederhanakan menjadi:

$$f_j - f_{j-1} - \frac{h_j}{2}(m_j + m_{j-1}) = 0 \quad (4.50)$$

$$m_j - m_{j-1} - \frac{h_j}{2}(z_j + z_{j-1}) = 0 \quad (4.51)$$

$$s_j - s_{j-1} - \frac{h_j}{2}(q_j + q_{j-1}) = 0 \quad (4.52)$$

$$A(z_j - z_{j-1}) + \frac{2}{4}h_j(f_j + f_{j-1})(z_j + z_{j-1}) - \frac{1}{4}h_j(m_j + m_{j-1})^2 + \frac{1}{2}h_jB(s_j + s_{j-1}) + \frac{9}{4}h_j - \frac{1}{2}h_jC(m_j + m_{j-1}) + \frac{3}{2}Ch_j = R_1 \quad (4.53)$$

$$D(q_j - q_{j-1}) + \frac{2}{4}h_j(f_j + f_{j-1})(q_j + q_{j-1}) = R_2 \quad (4.54)$$

Dengan

$$R_1 = -\frac{9}{4}h_j - \frac{3}{2}Ch_j$$

$$R_2 = 0$$

Dengan kondisi batas :

$$f_0 = 0, m_0 = 0, s_0 = 1 \text{ saat } y = 0$$

$$m \rightarrow \frac{3}{2}, s \rightarrow 0 \text{ saat } s \rightarrow \infty \quad (4.55)$$

#### 4.4.3 Linierisasi Model

Setelah model diskritisasi, maka selanjutnya dilakukan linierisasi model pada Persamaan (4.50)-(4.54) dengan metode



Newton. Dikenalkan bentuk iterasi ( $i$ ) metode Newton sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
 m_j^{(i+1)} &= m_j^{(i)} + \delta m_j^{(i)} \\
 z_j^{(i+1)} &= z_j^{(i)} + \delta z_j^{(i)} \\
 s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
 q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Iterasi ( $i$ ) berjalan dari 1 hingga  $(np+1)$  dimana  $np$  merupakan titik ujung diskritisasi dari sumbu  $\eta$ . Dengan substitusi bentuk iterasi (4.56) pada sistem Persamaan (4.50)-(4.54), sehingga diperoleh

$$\left( f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \right) - \left( f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)} \right) - \frac{h_j}{2} \left( m_j^{(i)} + \delta m_j^{(i)} + m_{j-1}^{(i)} + \delta m_{j-1}^{(i)} \right) = 0 \tag{4.57}$$

$$\left( m_j^{(i)} + \delta m_j^{(i)} \right) - \left( m_{j-1}^{(i)} + \delta m_{j-1}^{(i)} \right) - \frac{h_j}{2} \left( z_j^{(i)} + \delta z_j^{(i)} + z_{j-1}^{(i)} + \delta z_{j-1}^{(i)} \right) = 0 \tag{4.58}$$

$$\left( s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \right) - \left( s_{j-1}^{(i)} + \delta s_{j-1}^{(i)} \right) - \frac{h_j}{2} \left( q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} + q_{j-1}^{(i)} + \delta q_{j-1}^{(i)} \right) = 0 \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 &A \left( \left( z_j^{(i)} + \delta z_j^{(i)} \right) - \left( z_{j-1}^{(i)} + \delta z_{j-1}^{(i)} \right) \right) + \frac{2}{4} h_j \left( f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} + \right. \\
 &f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)} \left. \right) \left( z_j^{(i)} + \delta z_j^{(i)} + z_{j-1}^{(i)} + \delta z_{j-1}^{(i)} \right) - \frac{1}{4} h_j \left( m_j^{(i)} + \right. \\
 &\delta m_j^{(i)} + m_{j-1}^{(i)} + \delta m_{j-1}^{(i)} \left. \right)^2 + \frac{1}{2} h_j B \left( s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} + s_{j-1}^{(i)} + \right. \\
 &\delta s_{j-1}^{(i)} \left. \right) + h_j \frac{9}{4} - \frac{1}{2} h_j C \left( m_j^{(i)} + \delta m_j^{(i)} + m_{j-1}^{(i)} + \delta m_{j-1}^{(i)} \right) + \\
 &\frac{3}{2} C h_j = R_1
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$D \left( \left( q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \right) - \left( q_{j-1}^{(i)} + \delta q_{j-1}^{(i)} \right) \right) + \frac{2}{4} h_j \left( f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} + f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)} \right) \left( q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} + q_{j-1}^{(i)} + \delta q_{j-1}^{(i)} \right) = R_2 \quad (4.60)$$

secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi sehingga didapatkan

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta m + \delta m_{j-1}) = (r_1)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.61)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta z_j + \delta z_{j-1}) = (r_2)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.62)$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (r_3)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.63)$$

$$(a_1)_j \delta z_j + (a_2)_j \delta z_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta m_j + (a_6)_j \delta m_{j-1} + (a_7)_j \delta s_j + (a_8)_j \delta s_{j-1} = (r_4)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.64)$$

$$(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} = (r_5)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.65)$$

Dengan

$$\begin{aligned} (r_1)_{j-\frac{1}{2}} &= f_{j-1}^n - f_j^n + h_j m_{j-\frac{1}{2}} \\ (r_2)_{j-\frac{1}{2}} &= m_{j-1}^n - m_j^n + h_j z_{j-\frac{1}{2}} \\ (r_3)_{j-\frac{1}{2}} &= s_{j-1}^n - s_j^n + h_j q_{j-\frac{1}{2}} \\ (r_4)_{j-\frac{1}{2}} &= A(-z_j + z_{j-1}) - 2h_j(fz)_{j-\frac{1}{2}} + h_j(m)_{j-\frac{1}{2}}^2 - \\ &\quad h_j B(s)_{j-\frac{1}{2}} - h_j \frac{9}{4} + h_j C(m)_{j-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} C h_j + R_1 \\ (r_5)_{j-\frac{1}{2}} &= D(-t_j + t_{j-1}) - 2h_j(ft)_{j-\frac{1}{2}} + R_2 \end{aligned}$$

$$(a_1)_j = A + 2h_j(f)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(a_2)_j = (a_1)_j - 2A$$

$$(a_3)_j = 2h_j(z)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = h_j \left( m_{j-\frac{1}{2}} + C \right)$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = h_j B$$

$$(a_8)_j = (a_7)_j$$

$$(b_1)_j = D + 2h_j(f)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(b_2)_j = (b_1)_j - 2D$$

$$(b_3)_j = 2h_j(q)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(b_4)_j = (b_3)_j$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.55) maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta f_0 = 0, \delta m_0 = 0, \delta q_0 = 0$ .

#### 4.4.4 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada Persamaan (4.61)-(4.65) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok. Struktur tridiagonal blok biasanya terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta, sedangkan pada metode Keller-Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (4.64)-(4.69) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat  $j = 1, j = J - 1$ , dan  $j = J$  dimana  $j = 1, 2, \dots, J$  adalah berjalannya iterasi.

Ketika  $j = 1$ , maka Persamaan (4.64)-(4.69) menjadi

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{h_1}{2}(\delta m_1 + \delta m_0) = (r_1)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta m_1 - \delta m_0) - \frac{h_1}{2}(\delta z_1 + \delta z_0) = (r_2)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{h_1}{2}(\delta q_1 + \delta q_0) = (r_3)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$(a_1)_1 \delta z_1 + (a_2)_1 \delta z_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 + \\ (a_5)_1 \delta m_1 + (a_6)_1 \delta m_0 + (a_7)_1 \delta s_1 + (a_8)_1 \delta s_0 = (r_4)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 = (r_5)_{1-\frac{1}{2}}$$

Dengan memisalkan  $-\frac{h_1}{2} = d_1$  Berdasarkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta m_0 = 0, \delta s_0 = 0$  Maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_1 \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & 0 \\ 0 & 0 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_0 \\ \delta s_0 \\ \delta f_1 \\ \delta z_1 \\ \delta q_1 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & (a_7)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta z_2 \\ \delta q_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (r_1)_{1-(1/2)} \\ (r_2)_{1-(1/2)} \\ (r_3)_{1-(1/2)} \\ (r_4)_{1-(1/2)} \\ (r_5)_{1-(1/2)} \end{bmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya pada keadaan pertama, dapat ditulis  $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$

Ketika  $j = J - 1$ , maka Persamaan (4.64)-(4.69) menjadi

$$(\delta f_{J-1} - \delta f_{J-2}) - \frac{h_{J-1}}{2} (\delta m_{J-1} + \delta m_{J-2}) = (r_1)_{(J-1)-(\frac{1}{2})}$$

$$(\delta m_{J-1} - \delta m_{J-2}) - \frac{h_{J-1}}{2} (\delta z_{J-1} + \delta z_{J-2}) = (r_2)_{(J-1)-(\frac{1}{2})}$$

$$(\delta s_{J-1} - \delta s_{J-2}) - \frac{h_{J-1}}{2} (\delta q_{J-1} + \delta q_{J-2}) = (r_3)_{(J-1)-(\frac{1}{2})}$$

$$(a_1)_{J-1} \delta z_{J-1} + (a_2)_{J-1} \delta z_{J-2} + (a_3)_{J-1} \delta f_{J-1} + \\ (a_4)_{J-1} \delta f_{J-2} + (a_5)_{J-1} \delta m_{J-1} + (a_6)_{J-1} \delta m_{J-2} + \\ (a_7)_{J-1} \delta s_{J-1} + (a_8)_{J-1} \delta s_{J-2} = (r_4)_{(J-1)-(1/2)}$$

$$(b_1)_{J-1} \delta q_{J-1} + (b_2)_{J-1} \delta q_{J-2} + (b_3)_{J-1} \delta f_{J-1} + \\ (b_4)_{J-1} \delta f_{J-2} = (r_5)_{(J-1)-(1/2)}$$

dengan memisalkan  $-\frac{h_{J-1}}{2} = d_{J-1}$  maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{j-1} \\ 0 & 0 & (a_4)_{j-1} & (a_2)_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{j-1} & 0 & (b_2)_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m_{j-3} \\ \delta s_{j-3} \\ \delta f_{j-2} \\ \delta z_{j-2} \\ \delta q_{j-2} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} d_{j-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & d_{j-1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_{j-1} \\ (a_6)_{j-1} & (a_8)_{j-1} & (a_3)_{j-1} & (a_1)_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{j-1} & 0 & (b_1)_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m_{j-2} \\ \delta s_{j-2} \\ \delta f_{j-1} \\ \delta z_{j-1} \\ \delta q_{j-1} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_{j-1} & (a_7)_{j-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta z_j \\ \delta q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_2)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_3)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_4)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_5)_{(j-1)-(1/2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Untuk lebih jelasnya pada saat  $j = J - 1$ , persamaan dapat ditulis  $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$

Ketika  $j = J$ , maka Persamaan (4.64)-(4.69) menjadi

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{h_j}{2}(\delta m_j + \delta m_{j-1}) = (r_1)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta m_j - \delta m_{j-1}) - \frac{h_j}{2}(\delta z_j + \delta z_{j-1}) = (r_2)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{h_j}{2}(\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (r_3)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(a_1)_j \delta z_j + (a_2)_j \delta z_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta m_j + (a_6)_j \delta m_{j-1} + (a_7)_j \delta s_j + (a_8)_j \delta s_{j-1} = (r_4)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} = (r_5)_{j-\frac{1}{2}}$$

Dengan memisalkan  $-\frac{h_j}{2} = d_j$ , maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 0 & (a_4)_J & (a_2)_J & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_J & 0 & (b_2)_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m_{j-2} \\ \delta s_{j-2} \\ \delta f_{j-1} \\ \delta z_{j-1} \\ \delta q_{j-1} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} d_j & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_j \\ (a_6)_J & (a_8)_J & (a_3)_J & (a_1)_J & 0 \\ 0 & 0 & (b_3)_J & 0 & (b_1)_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta z_j \\ \delta q_j \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} (r_1)_{J-(1/2)} \\ (r_2)_{J-(1/2)} \\ (r_3)_{J-(1/2)} \\ (r_4)_{J-(1/2)} \\ (r_5)_{J-(1/2)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sehingga, untuk semua nilai  $j = J$ , kita memiliki  $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$

Adapun untuk semua  $j = 1, 2, 3, \dots, J-1, J$  dapat kita sederhanakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
 j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\
 j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\
 j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\
 & \vdots \\
 j = J-1 & : [B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j] \\
 j = J & : [B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]
 \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$A\delta = r \quad (4.66)$$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [B_{J-1}] & [A_{J-1}] & [C_{J-1}] \\ & & & & & [B_J] & [A_J] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{J-1}] \\ [\delta_J] \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{J-1}] \\ [r_J] \end{bmatrix}$$

Dengan elemen matriks sebagai berikut:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_1 \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & 0 \\ 0 & 0 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix},$$

$$[A_J] = \begin{bmatrix} d_J & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & d_J & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_J \\ (a_6)_J & (a_8)_J & (a_3)_J & (a_1)_J & 0 \\ 0 & 0 & (b_3)_J & 0 & (b_1)_J \end{bmatrix}$$

saat  $2 \leq j \leq J$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 0 & (a_4)_j & (a_2)_j & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_j & 0 & (b_2)_j \end{bmatrix},$$

saat  $2 \leq j \leq J$



$$[C_j] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_J & (a_7)_J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ saat } 1 \leq j \leq J-1$$

$$[\delta_1] = \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta s_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta t_1 \end{bmatrix}, [\delta_j] = \begin{bmatrix} \delta u_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta v_j \\ \delta t_j \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } [r_j] = \begin{bmatrix} (r_1)_{J-(1/2)} \\ (r_2)_{J-(1/2)} \\ (r_3)_{J-(1/2)} \\ (r_4)_{J-(1/2)} \\ (r_5)_{J-(1/2)} \end{bmatrix}, 2 \leq j \leq J$$

Koefisien matriks **A** pada persamaan (4.66) terlihat bahwa matriks A merupakan matriks tridiagonal yang seluruh elemennya bernilai nol kecuali pada diagonal utamanya. Sehingga Persamaan matriks (4.66) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok atau matriks **A** dapat difaktorkan menjadi

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (4.67)$$

Dengan

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_2] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [\alpha_{J-1}] & \\ & & & [B_J] & [\alpha_J] \end{bmatrix}$$

dan

$$U = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [I] & [\Gamma_{J-1}] \\ & & & & [I] \end{bmatrix}$$

$[I]$  merupakan matriks identitas dengan ukuran 5 dan  $[\alpha_1]$ , dan  $[\Gamma_1]$  merupakan matriks berukuran  $5 \times 5$  dengan elemen yang ditentukan oleh persamaan berikut:

$$[\alpha_1] = [A_1] \quad (4.68)$$

$$[\alpha_1][\Gamma_1] = [C_1] \quad (4.69)$$

$$[\alpha_j] = [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, J \quad (4.70)$$

$$[\alpha_j][\Gamma_j] = [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, J - 1 \quad (4.71)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.68) ke Persamaan (4.66) sehingga diperoleh

$$LU\delta = r \quad (4.72)$$

didefinisikan

$$U\delta = W \quad (4.73)$$

Maka persamaan (4.72) menjadi

$$LW = r \quad (4.74)$$

dengan

$$W = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{J-1}] \\ [W_J] \end{bmatrix}$$

dan  $[W_j]$  merupakan matriks berukuran  $5 \times 1$  yang elemennya diperoleh dari Persamaan (4.74) yaitu:

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_{j-1}], \text{ saat } 2 \leq j \leq J \end{aligned}$$

Elemen-elemen dari matrik  $\mathbf{W}$  yaitu  $\Gamma_j$ ,  $\alpha_j$  dan  $\mathbf{W}_j$  dapat dicari dengan menggunakan *forward sweep* dengan  $\mathbf{W}_1$  digunakan untuk mencari  $\mathbf{W}_2$  dan seterusnya hingga  $\mathbf{W}_J$ . Selanjutnya dicari penyelesaian dari  $\delta$  pada Persamaan (4.73) atau yang biasa disebut *backward sweep*. Delta  $J$  diperoleh dari  $\mathbf{W}_J$ ,  $\delta_j$  diperoleh dari  $\mathbf{W}_j$  dan seterusnya hingga  $\delta_1$  atau dapat ditulis seperti pada persamaan berikut:

$$\begin{aligned} [\delta_J] &= [\mathbf{W}_J] \\ [\delta_j] &= [\mathbf{W}_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq J-1 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Setelah didapatkan nilai  $\delta$  maka Persamaan (4.61)-(4.65) dapat digunakan untuk melakukan iterasi pada Persamaan (4.54). Iterasi dilakukan hingga memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw, kriteria konvergen menggunakan  $z(0, \eta)$  dan iterasi berhenti saat didapatkan  $|\delta z_0^{(i)}| < \varepsilon$ , dan pada penelitian ini digunakan  $\varepsilon = 10^{-5}$  yang memberikan nilai presisi sampai empat desimal.

#### 4.5 Simulasi dan Analisis Hasil

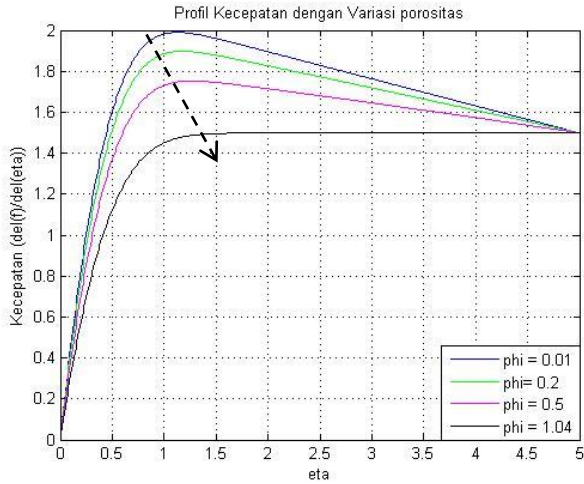
Simulasi hasil perhitungan numerik dari model matematika suatu aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano pada Persamaan (4.35) dan (4.36) yang diselesaikan dengan metode Keller-Box, divisualisasikan dengan menggunakan *software* MATLAB (Lampiran 3). Grafik 1 menunjukkan profil kecepatan ( $f'$ ) dan Grafik 2 menunjukkan profil temperatur ( $\theta$ ) dengan variasi nilai parameter porositas ( $\phi$ ), parameter konveksi campuran ( $\lambda$ ), bilangan Prandtl ( $Pr$ ) dan volume fraction ( $\chi$ ). Tanda panah  $\rightarrow$  menunjukkan arah profil kecepatan maupun temperatur ketika nilai parameter semakin bertambah. Simulasi ini menggunakan partisi  $\eta$  sebanyak 600,

$\Delta\eta = 0.02$  dan menggunakan tembaga (Cu) sebagai partikel nano.

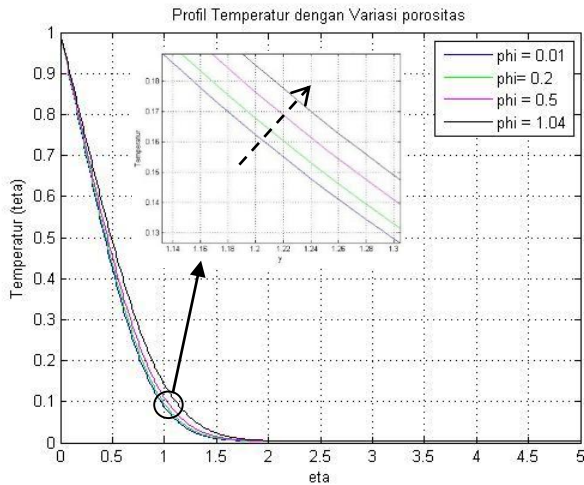
#### 4.5.1 Pengaruh Parameter Porositas

Gambar 4.2 dan 4.3 menunjukkan profil kecepatan dan temperatur aliran fluida dengan variasi nilai parameter porositas ( $\phi$ ) = 0.01, 0.2, 0.5, 1.04 dan nilai  $Pr = 1.7$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\chi = 0.1$  dengan partikel nano Cu. Dari gambar 4.2 dan 4.3 dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai parameter porositas pada bola berpori maka menyebabkan profil kecepatan semakin berkurang dan profil temperatur meningkat. Hasil tersebut telah sesuai dengan hukum Darcy. Porositas pada mekanika fluida memiliki makna kemampuan suatu benda berpori untuk menyerap dan menyimpan suatu fluida yang melewatinya. Sehingga dapat dipahami bahwa jika porositas dari suatu benda semakin besar maka aliran dari fluida yang melewatinya semakin terhambat.

Selain itu, menurut Hukum Darcy, semakin meningkatnya permeabilitas ( $K^*$ ) dari suatu benda menyebabkan semakin meningkatnya kecepatan fluida untuk melewati benda tersebut. Oleh karena itu, pada saat parameter porositas ( $\phi = \frac{\mu_f a}{\rho_f K^* U_\infty}$ ) dari fluida semakin besar maka permeabilitas dari fluida semakin kecil sehingga kecepatan fluida juga menurun. Sedangkan pada profil temperatur dengan variasi porositas tidak terlihat signifikan, dikarenakan model pada persamaan energi pada fluida yang melewati suatu bola berpori tidak mengandung parameter porositas.



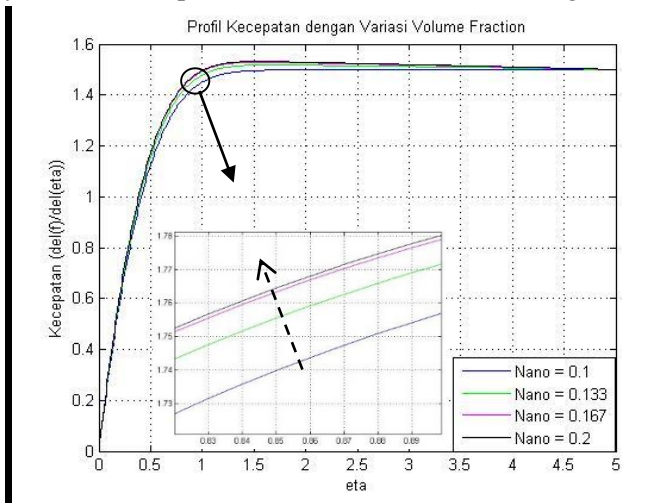
Gambar 4.2 Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Porositas ( $\phi$ )



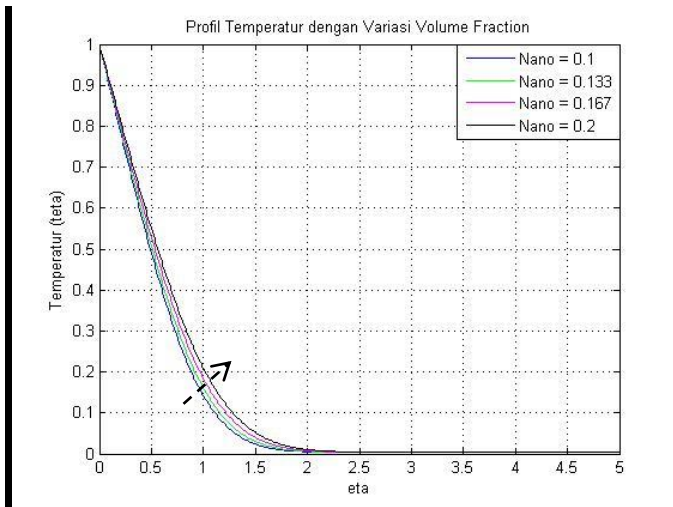
Gambar 4.3 Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Porositas ( $\phi$ )

#### 4.5.2 Pengaruh Parameter Volume Fraction

Gambar 4.4 dan 4.5 menggambarkan profil kecepatan dan temperatur aliran fluida nano dengan variasi *volume fraction*  $\chi = 0.1, 0.133, 0.167, 0.2$  dan nilai  $Pr = 1.7, \lambda = 1, \phi = 1.04$  dengan partikel nano  $Cu$ . Dari gambar 4.4 dan 4.5 dapat dilihat bahwa semakin besar nilai *volume fraction* maka semakin besar profil temperatur dan kecepatan fluida. Hal ini disebabkan karena semakin banyak partikel pada fluida maka semakin banyak gesekan antar partikel yang terjadi, hal inilah yang menyebabkan temperatur semakin meningkat. Ketika temperatur meningkat maka viskositas fluida semakin berkurang, sehingga hal ini menyebabkan kecepatan fluida akan semakin meningkat.



Gambar 4.4 Profil Kecepatan dengan Variasi Volume Fraction ( $\chi$ )



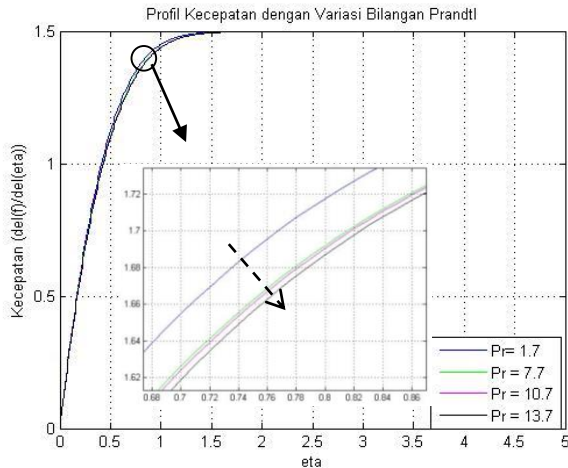
Gambar 4.5 Profil Temperatur dengan Variasi Volume Fraction ( $\chi$ )

#### 4.5.3 Pengaruh Bilangan Prandtl

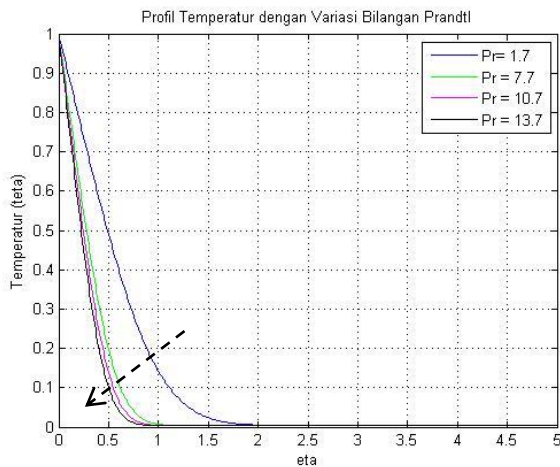
Gambar 4.6 dan 4.7 menunjukkan profil kecepatan dan temperatur aliran fluida dengan variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) = 1.7, 7.7, 10.7, 13.7 dan nilai  $\phi = 1.04$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\chi = 0.1$  dengan partikel nano  $Cu$ . Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai bilangan Prandtl, maka akan menyebabkan profil kecepatan dan temperatur pada fluida yang melewati bola berpori semakin lambat. Grafik yang dihasilkan pada kasus ini menunjukkan hal yang sama dengan definisi dari bilangan Prandtl.

Bilangan Prandtl adalah perbandingan nilai dari viskositas kinematik dan difusivitas panas, dengan semakin meningkatnya nilai dari bilangan Prandtl akan berpengaruh pada besar viskositas kinematik dan difusivitas panas dari fluida. Pada saat viskositas kinematik meningkat, kecepatan fluida akan menurun karena kekentalan fluida meningkat. Sedangkan pada saat difusivitas

panas nilainya semakin kecil maka akan menyebabkan temperatur panas suatu fluida semakin kecil karena diffusivitas panas adalah koefisien panas.



Gambar 4.6 Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ )

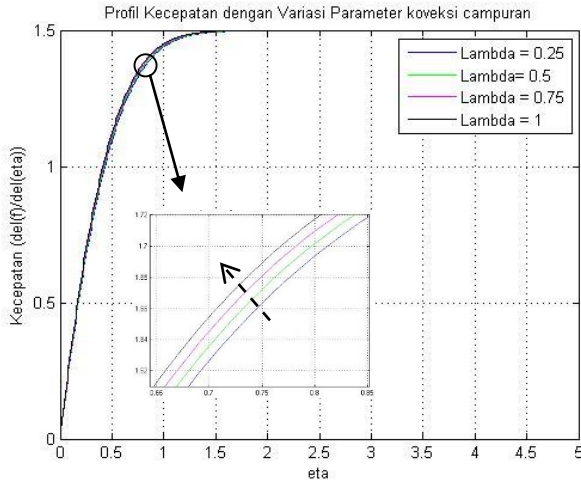




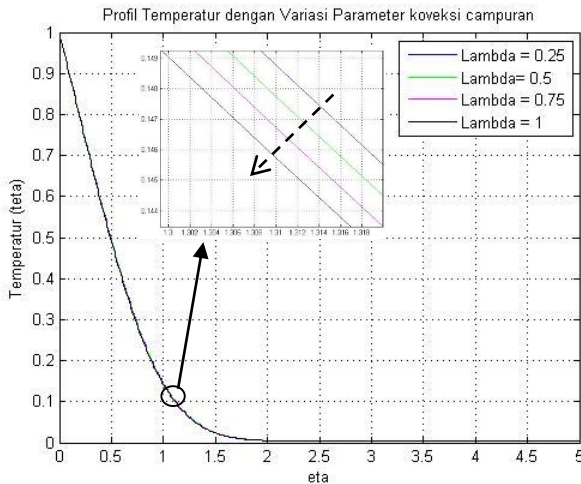
Gambar 4.7 Profil Temperatur dengan Variasi  
Prandtl ( $Pr$ )

#### 4.5.3 Pengaruh Parameter Konveksi Campuran

Pada penelitian ini juga dianalisa pengaruh adanya konveksi campuran. Gambar 4.8 dan 4.9 menunjukkan profil kecepatan dan temperatur aliran fluida dengan variasi nilai parameter konveksi campuran  $\lambda > 0$  yaitu pada saat  $(\lambda) = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ , nilai  $Pr = 1.7$ ,  $\phi = 1.04$ ,  $\chi = 0.1$  dengan menggunakan partikel nano  $Cu$ . Dari gambar 4.8 dan 4.9 dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai parameter konveksi campuran pada fluida menyebabkan profil kecepatan dan profil temperatur dari aliran pada fluida yang melewati bola berpori semakin meningkat. Hal ini sesuai dengan teori konveksi campuran karena semakin besar parameter konveksi campuran akan menyebabkan semakin besarnya konveksi paksa (*force convection flow*) yang bekerja pada fluida tersebut. Selain itu, pengaplikasian dari konveksi paksa pada perpindahan panas adalah sebagai peningkat laju perubahan panas.



Gambar 4.8 Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi Campuran ( $\lambda$ )



Gambar 4.9 Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi





## LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Merubah persamaan pembangun dimensional ke persamaan non-dimensional

**Persamaan kontinuitas:**

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{r}\bar{v}) = 0$$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial(ra)}{\partial(xa)} (uU_{\infty}) + \frac{\partial(ra)Re^{\frac{1}{2}}}{\partial(ya)} \left( \frac{vU_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) = 0$$

$$(U_{\infty}) \frac{\partial ru}{\partial x} + (U_{\infty}) \frac{\partial rv}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{\partial}{\partial y} (rv) = 0$$

**Persamaan Momentum:**

terhadap sumbu  $\bar{x}$ :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{u} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_{\infty}) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= uU_{\infty} \frac{\partial uU_{\infty}}{\partial(xa)} + \frac{vU_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial uU_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{\partial(ya)} \\ &= \frac{U_{\infty}^2}{a} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{U_{\infty}^2}{a} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{U_{\infty}^2}{a} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$-\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{u} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_{\infty}) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p \rho_{nf} U_{\infty}^2}{\partial(xa)} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{u U_{\infty} \phi \rho_f U_{\infty}}{\mu_f a} \right) + \frac{\mu_{nf} U_{\infty}}{\rho_{nf} a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
&\frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g T \frac{U_{\infty}^2 \lambda}{g \beta_f a} \sin x \\
&= -\frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} (\phi u) + \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{1}{U_{\infty} a} \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
&\frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\beta_f \rho_{nf}} T \lambda \sin x
\end{aligned}$$

Dengan menggabungkan persamaan kiri dan kanan, dan dikalikan  $\frac{a}{U_{\infty}^2}$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi u + \frac{1}{U_{\infty} a} \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \\
&\frac{1}{U_{\infty} a} \frac{Re \mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\left( \chi \rho_s \frac{\beta_s}{\beta_f} + (1-\chi) \rho_f \right)}{\rho_{nf}} T \lambda \sin x \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi u + \\
&\frac{1}{Re} \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
&\frac{\left( \chi \rho_s \frac{\beta_s}{\beta_f} + (1-\chi) \rho_f \right)}{\rho_{nf}} T \lambda \sin x
\end{aligned}$$

Dengan memasukkan variabel fluida nano maka didapat persamaan momentum terhadap sumbu  $x$  dalam bentuk non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi u + \\
& \frac{1}{Re} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \\
& \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\left(\chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi)\right)}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} T \lambda \sin x
\end{aligned}$$

terhadap sumbu  $\bar{y}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{v} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - \\
& \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - T_\infty) \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)
\end{aligned}$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = & \frac{u U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v U_\infty}{\partial (xa)} + \frac{v U_\infty}{Re} \frac{\partial v U_\infty}{\partial (ya)} \\
= & \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(v \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
= & \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{v} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g(T - \\
& T_\infty) \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \\
= & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p \rho_{nf} U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{\partial (ya)} - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{v U_\infty \phi \rho_f U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} \mu_f a}\right) + \frac{\mu_{nf} U_\infty}{\rho_{nf} a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{(\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f \beta_f)}{\rho_{nf}} g T \frac{U_\infty^2 \lambda}{g \beta_f a} \cos x
\end{aligned}$$

$$= -\frac{Re^{\frac{1}{2}}U_{\infty}^2}{a}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{U_{\infty}^2}{a}\frac{\mu_{nf}\rho_f}{Re^{\frac{1}{2}}\mu_f\rho_{nf}}(\phi v) + \frac{U_{\infty}^2}{a}\frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}U_{\infty}a}\frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{U_{\infty}^2}{a}\frac{(\chi\rho_s\beta_s + (1-\chi)\rho_f\beta_f)}{\beta_f\rho_{nf}}T\lambda \cos x$$

Dengan menggabungkan persamaan kiri dan kanan, dan dikalikan  $\frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}U_{\infty}^2}$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re}\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}}\frac{1}{\left((1-\chi)+\chi\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)}\phi v + \\ &\quad \frac{1}{Re}\frac{1}{Re}\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{Re}\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \\ &\quad \frac{(\chi\rho_s\beta_s + (1-\chi)\rho_f\beta_f)}{\beta_f\rho_{nf}}T\lambda \cos x \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re}\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}}\frac{1}{\left((1-\chi)+\chi\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)}\phi v + \\ &\quad \frac{1}{Re^2}\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{Re}\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \\ &\quad \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}}\frac{(\chi\rho_s\beta_s + (1-\chi)\rho_f\beta_f)}{\rho_{nf}}T\lambda \cos x \end{aligned}$$

Dengan memasukkan variabel fluida nano maka didapat persamaan momentum terhadap sumbu  $y$  dalam bentuk non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re}\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}}\frac{1}{\left((1-\chi)+\chi\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)}\phi v + \\ &\quad \frac{1}{Re^2}\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{Re}\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \\ &\quad \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}}\frac{(\chi\rho_s\beta_s + (1-\chi)\rho_f\beta_f)}{\rho_{nf}}T\lambda \cos x \end{aligned}$$



### Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= u U_{\infty} \frac{\partial (T(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty}) + \bar{T}_{\infty})}{\partial (xa)} + \frac{v U_{\infty}}{Pe^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (T(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty}) + \bar{T}_{\infty}) Re^{\frac{1}{2}}}{\partial (ya)} \\ &= \frac{U_{\infty}(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty})}{a} u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{U_{\infty}(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty})}{a} v \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{U_{\infty}(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty})}{a} \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) &= \alpha_{nf} \frac{\partial^2 (T(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty}) + \bar{T}_{\infty})}{\partial (xa)^2} + \alpha_{nf} \frac{\partial^2 (T(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty}) + \bar{T}_{\infty}) Re}{\partial (ya)^2} \\ &= \alpha_{nf} \frac{(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty})}{a^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka dapat dituliskan

$$\frac{U_{\infty}(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty})}{a} \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha_{nf} \frac{(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty})}{a^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Dengan membagi kedua ruas dengan  $\frac{U_{\infty}(\bar{T}_f - \bar{T}_{\infty})}{a}$  didapatkan

$$\begin{aligned} \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \alpha_{nf} \frac{1}{U_{\infty} a} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ &= \alpha_{nf} \frac{1}{Re} \frac{\rho_f}{\mu_f} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ &= \alpha_{nf} \frac{1}{Re Pr \alpha_f} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{Re Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Re}{Re Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{Re Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan pembangun energi dalam bentuk non-dimensional sebagai berikut:

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

### Kondisi Batas

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_f \text{ pada saat } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} \rightarrow T_\infty \text{ pada saat } \bar{y} \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

### saat $\bar{y} = 0$

$$\bar{u} = 0 \text{ dapat ditulis } u U_\infty = 0$$

$$u = 0$$

$$\bar{v} = 0 \text{ dapat ditulis } \frac{u U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$v = 0$$

$$\bar{T} = T_f \text{ dapat ditulis } T = 1 \text{ (diasumsikan bahwa temperatur dinding maksimum)}$$

### saat $\bar{y} \rightarrow \infty$

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u}_e(\bar{x}) \text{ dapat ditulis } u U_\infty = \left(\frac{3}{2}\right) U_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

$$u = \left(\frac{3}{2}\right) \sin\left(\frac{x a}{a}\right)$$

$$u = \left(\frac{3}{2}\right) \sin x$$

$$\bar{T} \rightarrow T_\infty \text{ dapat ditulis } T = 0 \text{ (diasumsikan bahwa temperatur dinding minimum)}$$

Sehingga didapat kondisi batas :

$$u = v = 0, T = 1 \text{ pada saat } \bar{y} = 0$$

$$u \rightarrow \frac{3}{2} \sin x, T \rightarrow 0 \text{ pada saat } \bar{y} \rightarrow \infty$$

## Lampiran 2. Pembentukan persamaan similaritas

Untuk merubah persamaan non-dimensional menjadi persamaan similaritas, digunakan variabel similaritas sebagai berikut:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dengan mensubstitusikan fungsi alir yang didefinisikan:

$$\psi = xr(x)f(x, \eta) \quad T = \theta(x, \eta) \quad \eta = y$$

ke variabel non-similar di atas dan didefinisikan  $r(x) = \sin(x)$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r(x)f(x, \eta))}{\partial \eta} \\ u &= x \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (xr(x)f(x, \eta)) \\ &= -\frac{1}{r} \left( xr \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial (xr)}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \left( xr \frac{\partial f}{\partial x} + f \left( r + x \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{r} \left( xr \frac{\partial f}{\partial x} + f \left( r + x \frac{\partial}{\partial x} \sin(x) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{r} \left( xr \frac{\partial f}{\partial x} + f(r + x \cos(x)) \right) \\ &= \left( -x \frac{\partial f}{\partial x} - f \left( 1 + x \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) \right) \\ &= \left( -x \frac{\partial f}{\partial x} - f(1 + x \cot x) \right) \end{aligned}$$

maka didapat:

**Persamaan kontinuitas:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \eta}\right) &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Karena persamaan kontinuitas bernilai nol, maka persamaan ini dapat dihilangkan.

**Persamaan Momentum:**

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{3}{2} \sin x \frac{\partial^3 \sin x}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \phi(u - u_e) + \\ &\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\left(\chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi)\right)}{\left((1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} \lambda T \sin x\end{aligned}$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) + \left(-x \frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\ &= x \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta}\right)\right) + x \left(\left(-x \frac{\partial f}{\partial x} - \right.\right. \\ &\quad \left.\left.f(1 + x \cot x)\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\ &= x \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta}\right) + x \left(-x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left.f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} (1 + x \cot x)\right)\end{aligned}$$

$$= x \left[ \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) + \left( -x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} (1 + x \cot x) \right) \right]$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \sin x \frac{\partial^3 \sin x}{\partial x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi(u - u_e) + \\ & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda T \sin x \\ & = \frac{9}{4} \sin x \cos x - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi \left( x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{3}{2} \sin x \right) + \\ & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( x \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda \theta \sin x \\ & = \frac{9}{4} \sin x \cos x - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi \left( x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{3}{2} \sin x \right) + \\ & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \left( x \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) \right) + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda \theta \sin x \end{aligned}$$

Kemudian dengan membagi kedua ruas oleh  $x$ , dan ruas kiri sama dengan ruas kanan maka didapat:

$$\begin{aligned}
& \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) + \left( -x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} (1 + x \cot x) \right) = \\
& \frac{9 \sin x \cos x}{4 x} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{3}{2} \right) + \\
& \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda \theta \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

sehingga persamaan momentum dalam bentuk non-similar sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + (1 + x \cot x) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \\
& \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda \theta \frac{\sin x}{x} + \frac{9 \sin x \cos x}{4 x} - \\
& \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{3}{2} \right) = x \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

### Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\
& \Leftrightarrow \left( x \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( -x \frac{\partial f}{\partial x} - f(1 + x \cot x) \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \\
& \frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( -x \frac{\partial f}{\partial x} - f(1 + x \cot x) \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} =$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right)$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + (1 +$$

$$x \cot x) f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = x \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$$

### Kondisi batas

$u = v = 0, T = 1$  pada saat  $y = 0$

$u \rightarrow \frac{3}{2} \sin x, T \rightarrow 0$  pada saat  $y \rightarrow \infty$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = x \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{dan} \quad v = -x \frac{\partial f}{\partial \eta} - f(1 + x \cot x)$$

**pada saat  $y = 0$**

$u = 0$  dapat ditulis  $x \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$  (kedua ruas dibagi  $x$ )

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

$v = 0$  dapat ditulis  $-x \frac{\partial f}{\partial \eta} = (f + f x \cot x)$

$T = 1$  dapat ditulis  $\theta = 1$

**pada saat  $y \rightarrow \infty$**

$u \rightarrow \frac{3}{2} \sin x$  dapat ditulis  $x \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow \frac{3}{2} \sin x$  (kedua ruas dibagi  $x$ )

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow \frac{3}{2} \frac{\sin x}{x}$$

$T \rightarrow 0$  dapat ditulis  $\theta \rightarrow 1$

sehingga kondisi batas persamaan similar dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, -x \frac{\partial f}{\partial \eta} = (f + fx \cot x), \quad \theta = 1 \quad \text{pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow \frac{3}{2} \frac{\sin x}{x}, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{pada saat } \eta \rightarrow \infty$$



**Lampiran 3.** Listing Program

```

clear all
clc
close all
format long
np = 500;
nr=np+1;

%parameter non dimensional
phi=1.04; %var parameter porositas 0.01 0.2 0.5 0.8
pr=1.7; %var bilangan prandtl: 1.7 7.7 10.7 13.7
N=0.1; %var voluume fraction :0.1 0.133 0.167 0.2
% lambda=1; %var parameter konveksi campuran 0<lambda<1

%nano
rhos=8933; %density of cu:400 Ag:10500 CuO:6500
Al203:3970 TiO2:4250
rhof=997.1; %water
Bs=0.0000167;%thermal expansion coefficient (B.10^-5) >>
cu:1.67 Al203:0.85 TiO2:0.9
Bf=0.00021; %water
ks=400; %thermal conductivity cu:400 Ag:429 CuO:20
Al203:40 TiO2:8.9538
kf=0.613; %water
cs=385; %heat capacity cu:386 Ag:235 CuO:535.6 Al203:765
TiO2:686.2
cf=4179; %water

deleta = 0.01;
eta(1) = 0.0;
etac(1) = 0.0;
etu(1)=0.0;

%% Variasi Volume Fraction

```

```
% Nano(1)=0.1;
% Nano(2)=0.133;
% Nano(3)=0.167;
% Nano(4)=0.2;
```

```
%Variasi Bilangan Prandtl
% Prandtl(1)=1.7;
% Prandtl(2)=7.7;
% Prandtl(3)=10.7;
% Prandtl(4)=13.7;
```

```
% Variasi Konveksi Campuran
lambdaa(1)=0.25;
lambdaa(2)=0.5;
lambdaa(3)=0.75;
lambdaa(4)=1;
```

```
% Variasi Parameter Porositas
% si(1)=0.01;
% si(2)=0.2;
% si(3)=0.5;
% si(4)=1.04;
%%
```

```
for j = 2:nr
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for j=1:np
    etu(j)=eta(j);
end
```

```
for i=1:4
%   N=Nano(i);
%   pr=Prandtl(i);
    lambda=lambdaa(i);
```

```

%   phi=si(i);
    k=1;
    stop = 1;
while stop > 0.00001
A=(1/((1-N)^2.5))*(1/((1-N)+N*(rhos/rhof)));
B=(N*(Bs/Bf)+(1-N)*(rhof/rhos))*(1/((1-
N)*(rhof/rhos)+N))*lambda;
C=A*phi;
D=(1/pr)*(((ks+2*kf)-2*N*(kf-ks))/((ks+2*kf)+N*(kf-
ks)))*(1/((1-N)+N*((rhof*cs)/(rhos*cf))));

for j=1:np
% Initial Condition
f(j,1) = 3/8*(eta(j)^2/eta(j+1))*(3-0.5*((eta(j)/eta(j+1))^2));
m(j,1) = (3/4)*(eta(j)/eta(j+1))*(3-((eta(j)/eta(j+1))^2));
z(j,1) = (9/4)*(1/eta(j+1))*(1-((eta(j)/eta(j+1))^2));
s(j,1) = -((eta(j)/eta(j+1))^2)+1;
q(j,1) = -2*(eta(j)/eta(j+1))*(1/eta(j+1));
end
for j = 2:np
    fb(j,k) = 0.5*(f(j,k)+f(j-1,k));
    mb(j,k) = 0.5*(m(j,k)+m(j-1,k));
    zb(j,k) = 0.5*(z(j,k)+z(j-1,k));
    sb(j,k) = 0.5*(s(j,k)+s(j-1,k));
    qb(j,k) = 0.5*(q(j,k)+q(j-1,k));
    derzb(j,k) = (z(j,k)-z(j-1,k))/deleta;
    fzfzb(j,k) = fb(j,k)*zb(j,k);
    mnjb(j,k) = (mb(j,k))^2;
    derqb(j,k) = (q(j,k)-q(j-1,k))/deleta;
    fqfqb(j,k) = fb(j,k)*qb(j,k);

    a1(j,k) = A+(deleta*fb(j,k));
    a2(j,k) = a1(j,k)-(2*A) ;
    a3(j,k) = deleta*zb(j,k);
    a4(j,k) = a3(j,k);

```

```

a5(j,k) = -deleta*(mb(j,k)+(C*0.5));
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = deleta*B/2;
a8(j,k) = a7(j,k);

b1(j,k) = D+(deleta*fb(j,k));
b2(j,k) = b1(j,k)-(2*D);
b3(j,k) = deleta*qb(j,k);
b4(j,k) = b3(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k)-f(j,k)+deleta*mb(j,k);
r2(j,k) = m(j-1,k)-m(j,k)+deleta*zb(j,k);
r3(j,k) = s(j-1,k)-s(j,k)+deleta*qb(j,k);
r4(j,k) = A*(z(j-1,k)-z(j,k))-
(2*deleta*fzfb(j,k))+(deleta*mnjb(j,k))-(deleta*B*sb(j,k))-
((9/4)*deleta)+(deleta*C*mb(j,k))-(deleta*((9/4)-((3/2)*C)));
r5(j,k) = D*(q(j-1,k)-q(j,k))-(2*deleta*fqfb(j,k));
end
% Matrices
a{2,k} = [ 0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -
0.5*deleta; a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) 0; 0 0 b3(2,k) 0
b1(2,k)];
for j = 3:np
    a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1 0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -
0.5*deleta; a6(j,k) a8(j,k) a3(j,k) a1(j,k) 0; 0 0 b3(j,k) 0 b1(j,k)];
    b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta;
0 0 a4(j,k) a2(j,k) 0; 0 0 b4(j,k) 0 b2(j,k)];
end;
for j = 2:np
    c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k)
a7(j,k) 0 0 0; 0 0 0 0 0];
end;
%% forward sweep
alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};

```

```

for j = 3:np
    alfa{j,k} = a{j,k} - (b{j,k} * gamma{j-1,k});
    gamma{j,k} = inv(alfa{j,k}) * c{j,k};
end;
for j = 2:np
    rr{j,k} = [r1(j,k); r2(j,k); r3(j,k); r4(j,k); r5(j,k)];
end;
ww{2,k} = inv(alfa{2,k}) * rr{2,k};
for j = 3:np
    ww{j,k} = inv(alfa{j,k}) * (rr{j,k} - (b{j,k} * ww{j-1,k}));
end;
%% backward sweep
%kondisi batas
delm(1,k) = 0;
dels(1,k) = 0;
delf(1,k) = 0;
delm(np,k) = 0;
dels(np,k) = 0;
dell{np,k} = ww{np,k};

for j = np-1:-1:2
    dell{j,k} = ww{j,k} - (gamma{j,k} * dell{j+1,k});
end;
delz(1,k) = dell{2,k}(1,1);
delq(1,k) = dell{2,k}(2,1);
delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
delz(2,k) = dell{2,k}(4,1);
delq(2,k) = dell{2,k}(5,1);

for j = np:-1:3
    delm(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
    dels(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
    delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
    delz(j,k) = dell{j,k}(4,1);
    delq(j,k) = dell{j,k}(5,1);

```

```
end;
```

```
%% Newton's Method
```

```
for j = 1:np
```

```
    f(j,k+1) = f(j,k) + delf(j,k);
```

```
    m(j,k+1) = m(j,k) + delm(j,k);
```

```
    z(j,k+1) = z(j,k) + delz(j,k);
```

```
    s(j,k+1) = s(j,k) + dels(j,k);
```

```
    q(j,k+1) = q(j,k) + delq(j,k);
```

```
    %t(j,k+1) = -gama*(1+s(j,k+1));
```

```
end;
```

```
stop = abs(delz(1,k));
```

```
kmax = k;
```

```
k = k + 1;
```

```
end
```

```
for j = 1:np
```

```
    ff(j) = f(j,k);
```

```
    mm(j) = m(j,k);
```

```
    zz(j) = z(j,k);
```

```
    ss(j) = s(j,k);
```

```
    qq(j) = q(j,k);
```

```
end
```

```
for j=1:np
```

```
    ffb(j) = fb(j,kmax);
```

```
    mmb(j) = mb(j,kmax);
```

```
    zzb(j) = zb(j,kmax);
```

```
    ssb(j) = sb(j,kmax);
```

```
    qqb(j) = qb(j,kmax);
```

```
    dderzb(j) = derzb(j,kmax);
```

```
    dderqb(j) = derqb(j,kmax);
```

```
end
```

```
if(i==1)
```

```
figure(1)
```

```
plot(etu,m(:,kmax),'-b')
```

```
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-b')
hold on;
```

```
elseif(i==2)
figure(1)
plot(etu,m(:,kmax),'-g')
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-g')
hold on;
```

```
elseif(i==3)
figure(1)
plot(etu,m(:,kmax),'-m')
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-m')
hold on;
```

```
elseif(i==4)
figure(1)
plot(etu,m(:,kmax),'-black')
hold on;
grid on;
```

```
%% Indonesia
% title('Profil Kecepatan dengan Variasi Volume Fraction')
% legend('Nano = 0.1','Nano = 0.133','Nano = 0.167','Nano = 0.2')
% title('Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl')
% legend('Pr = 1.7','Pr = 7.7','Pr = 10.7','Pr = 13.7')
title('Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter koveksi
campuran')
```

```

legend('Lambda = 0.25','Lambda= 0.5','Lambda = 0.75','Lambda
= 1')
% title('Profil Kecepatan dengan Variasi porositas')
% legend('phi = 0.01','phi= 0.2','phi = 0.5','phi = 1.04')

xlabel('eta')
ylabel(' Kecepatan (del(f)/del(eta)) ')
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-black')
hold on;
grid on;

% title('Profil Temperatur dengan Variasi Volume Fraction')
% legend('Nano = 0.1','Nano = 0.133','Nano = 0.167','Nano = 0.2')
% title('Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl')
% legend('Pr= 1.7','Pr = 7.7','Pr = 10.7','Pr = 13.7')
title('Profil Temperatur dengan Variasi Parameter koveksi
campuran')
legend('Lambda = 0.25','Lambda= 0.5','Lambda = 0.75','Lambda
= 1')
% title('Profil Temperatur dengan Variasi porositas')
% legend('phi = 0.01','phi= 0.2','phi = 0.5','phi = 1.04')
xlabel('eta')
ylabel('Temperatur (teta)')
end
end

```





## BAB 5

### PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh pada pembahasan sebelumnya, serta diberikan beberapa saran sehingga dapat digunakan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matematika dari kecepatan aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano dalam kondisi *steady* pada titik stagnasi terendah  $x \approx 0$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} f''' + 2ff'' - f'^2 + \frac{\left( \chi \frac{\rho_s \beta_s}{\rho_f \beta_f} + (1-\chi) \right)}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \lambda \theta + \frac{9}{4} - \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left( (1-\chi) + \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \phi \left( f' - \frac{3}{2} \right) = 0$$

2. Sedangkan model matematika dari perpindahan panas aliran konveksi campuran yang melewati suatu bola berpori pada fluida nano dalam kondisi *steady* pada titik stagnasi terendah  $x \approx 0$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} \right) \frac{1}{\left( (1-\chi) + \chi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right)} \theta'' + 2f\theta' = 0$$

3. Dari penyelesaian numerik dan simulasi dalam bentuk grafik, dapat disimpulkan bahwa adanya pengaruh dari:
  - a. Parameter porositas ( $\phi$ ) = 0.01, 0.2, 0.5, 1.04 dan nilai  $Pr = 1.7$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\chi = 0.1$  dengan partikel nano *Cu*.

Ditunjukkan bahwa semakin meningkatnya nilai parameter porositas pada bola berpori maka menyebabkan profil kecepatan semakin berkurang dan profil temperatur meningkat.

- b. Parameter volume fraction  $\chi = 0.1, 0.133, 0.167, 0.2$  dan nilai  $Pr = 1.7, \lambda = 1, \phi = 1.04$  dengan partikel nano  $Cu$ . Profil kecepatan dan profil temperatur semakin meningkat seiring meningkatnya nilai volume fraction.
- c. Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) = 1.7, 7.7, 10.7, 13.7 dan nilai  $\phi = 1.04, \lambda = 1, \chi = 0.1$  dengan partikel nano  $Cu$ . Profil kecepatan dan temperatur menurun saat bilangan Prandtl semakin besar.
- d. Parameter konveksi campuran ( $\lambda$ ) = 0.01, 0.2, 0.5, 0.8, nilai  $Pr = 1.7, \phi = 1.04, \chi = 0.1$  dengan menggunakan partikel nano  $Cu$ . Profil kecepatan semakin menurun sedangkan profil temperatur semakin meningkat seiring dengan bertambahnya nilai parameter konveksi campuran.

## 5.2 Saran

Dari hasil yang sudah dicapai, penulis mengusulkan beberapa saran yang dapat digunakan untuk penyelesaian selanjutnya.

1. Pada Tugas Akhir ini menggunakan skema Keller-Box. Dalam penelitian selanjutnya dapat digunakan metode numerik lainnya. Sehingga diperoleh metode mana yang lebih sesuai.
2. Hasil dari Tugas Akhir ini hanya menggunakan hasil numerik. Untuk mengetahui seberapa besar *error*, diperlukan perhitungan secara analitik.
3. Untuk penelitian selanjutnya, sebaiknya ditunjukkan distribusi skin friction dan temperatur dinding untuk mengetahui profil kecepatan dan temperatur tepat pada permukaan dinding bola.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alkasasbeh, Hamzeh T. S (2015). *Numerical Solution for Convective Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere Of Newtonian and Non-Newtonian Fluid*, Ph.D. Universiti Malaysia Pahang.
- [2] Asirvatham, L.G., (2014), *Nanofluid heat transfer and applications*, Conference Extended Paper – Keynote Speech – JTEN-11.
- [3] Lee S, Choi SU.-S. (1996). *Application of Metallic Nanoparticle Suspensions in advanced Cooling Systems*, ASME Publications PVP-Vol. 342/MD-Vol.72, pp. 227-234.
- [4] Long, Chris dan Sayma, N.(2009), *Heat Transfer*, Ventus Publising ApS, ISBN:978-87-7681-423-8.
- [5] Mohammed, H.A., Mahdi, R.A., Munisamy, K.M., dan Saeid, N.H., (2015), *Review of convection heat transfer and fluid flow in porous media with nanofluid*, Renewable and Sustainable Energy Reviews 41, 715–734.
- [6] Mohammed, M.K.A., Salleh, M.Z., Hussanan, A., Sarif, N.M., Noar, Z.M., Ishak, A., dan Widodo, B., (2016), *Mathematical Model of Free Convection Boundary Layer Flow on Solid Sphere with Viscous Dissipation and Thermal Radiation*, International Journal of Computing Science and Applied Mathematics, Vol.2, No.2.
- [7] Nazar, R., Salleh, M.Z., dan Pop, I. (2010). *Mixed convection boundary layer flow about a solid sphere with Newtonian heating*, Arch. Mech., 62,4, pp 283-303, Warszawa.
- [8] Ternik, P., dan Rudolf, R. (2012). *Heat transfer enhancement for natural convection flow of water-based nanofluids in a square enclosure*, Int j simul model 11, 1, 29-39.

- [9] Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*. ITS Press, Surabaya, Indonesia.
- [10] Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.O., Rahayuningsih, T., and Purbandini (2016), *Viskoelastic fluid flow pass a porous circular cylinder when the magnetic field included*. Far East Journal of Mathematical Science (FJMS), Volume 99, Number 2, pp 173-186.
- [11] Widodo, B., Tafrikan, M., dan Imron, C. (2015), *Heat effect on fluid free convection flow past a porosity sphere*, The 1<sup>st</sup> Young Scientist International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection, Malang, Indonesia.
- [12] Widodo, B., Anggraini, I., Khalimah, D.A., Zainal. F.D.S., dan Imron, C. (2016), *Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past a Sphere*, Far East Journal of Mathematical Science (FJMS), Volume 100, Number 2, pp 291-299.

## BIODATA PENULIS



Penulis dengan nama lengkap Syafiatul Laila atau biasa dipanggil Lala. Dilahirkan di Kediri tanggal 25 Juni 1994 dan merupakan anak pertama dari 3 bersaudara. Pendidikan formal yang telah ditempuh penulis yaitu TK Dharma Wanita Kediri, SD Negeri Campurejo II Kediri, SMP Negeri 3 Kediri, dan SMA Negeri 2 Kediri, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2012. Pada masa perkuliahan penulis memilih Matematika Terapan sebagai bidang keahliannya.

Selama kuliah penulis aktif di Organisasi PLH SIKLUS ITS. PLH SIKLUS ITS adalah organisasi yang bergerak di lingkungan hidup dan berada dibawah Lembaga Minat Bakat ITS. Pada tahun 2013-2014 penulis menjadi Bendahara II sekaligus Staff Divisi Pendidikan dan Latihan (Diklat) PLH SIKLUS ITS. Pada tahun 2014-2015 penulis menjadi Staff Divisi Humas PLH SIKLUS ITS.

Selama penulisan Tugas Akhir ini, penulis tidak lepas dari kekurangan. Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke [syafia363@gmail.com](mailto:syafia363@gmail.com).